

台北市立陽明高中 高二下自然組 動手動腦

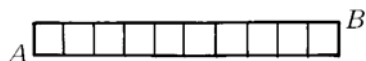
單元：2-1 集合計數 (1)

班級：

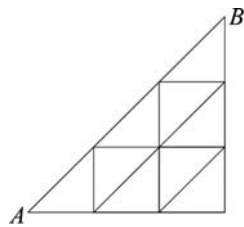
座號：

姓名：

1. 有 1 元幣 2 張，5 元幣 3 張，10 元幣 2 張，50 元幣 3 張，共有 a 種取法 (至少取一張)，共可構成 b 種不同款額，則 $(a, b) =$ _____。
2. 120 個學生中，喜好棒球者有 65 人，喜好籃球者有 73 人，設喜好棒球且喜好籃球者最多有 a 人，最少有 b 人，則數對 (a, b) 為 _____。
3. 每次用 24 根相同的火柴棒圍成一個三角形 (火柴棒不可折斷或重疊)，共可圍成 _____ 種不全等的三角形。
4. 設一室有四個門，甲乙二人由不同的門進出此室各一次，但每人不得由同一門進出，則其方法有 _____ 種。
5. 如附圖，共有二條橫線，十一條直線，由 A 走向 B ，可以向上、向下、向右走，則由 A 走到 B 共有 _____ 種走法。



6. 將一百元兌換成五元、十元、五十元，其兌法有 _____ 種。
7. 如附圖，由 A 點出發到 B ，其行走方向可為「 \rightarrow 」、「 \uparrow 」、「 \nearrow 」，則其走法有 _____ 種。



8. 有五種顏色的塗料，塗附圖中的六格
 - (1) 相鄰不同色的塗法有 _____ 種。
 - (2) 五色全用，且相鄰不同色之塗法有 _____ 種。

A	D
B	E
C	F

9. 有十個高矮不同的人排成一列，規定矮的不可排在兩個高的之間，則有 _____ 種排法。
10. 將 500 元兌換成 10 元、50 元或 100 元，其兌換方法數有 _____ 種。
11. 在三位數中，百位數與個位數之差的絕對值為 2 的數，共有 _____ 個。
12. 每次用 20 根相同的火柴棒圍成一個三角形，共可圍成 _____ 種不全等的三角形。
13. 樓梯有 8 階，某人上樓時或跨一階，或二階，或三階，此人上 8 階的樓梯，共有 _____ 種方法。

14. 540 的正因數有 _____ 個，其總和為 _____。

15. 1 到 1000 的整數中有多少個數不能被 2，5，7 這 3 個數中任一數整除？答：_____。

16. 新新鞋店為與同業進行促銷戰，推出「第二雙不用錢---買一送一」的活動。該鞋店共有八款鞋可供選擇，其價格如下：

款式	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
價格	670	670	700	700	700	800	800	800

規定所送的鞋之價格一定少於所買的價格 (例如：買一個「丁」款鞋，可送甲、乙兩款鞋之一)。若有一位新新鞋店的顧客買一送一，則該顧客所帶走的兩雙鞋，其搭配方法一共有 _____ 種。

17. 從 1 到 8876 的自然數中，如果從 1, 2, 3, ..., 一直寫到 8876，共要寫_____個 0。

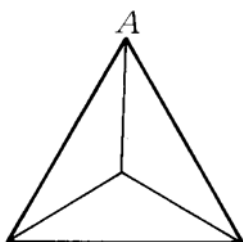
18. 在牆上有寬 2 公寸，長 9 公寸的空白長方形。若有許多紅色及綠色長方形的磁磚，紅磁磚的寬 1 公寸，長 3 公寸，綠磁磚的寬 1 公寸，長 6 公寸。用這些磁磚填滿此長方形，則可填出_____種不同圖形。

19. 不大於 1000 的自然數中，不能被 2、3、4、5、6 除盡的個數共_____個。

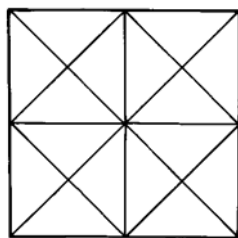
20. 設 $a \in N$, $1 \leq a \leq 500$, 且 $(a^2 - 4)$ 為 6 的倍數，

- (1) 滿足條件的 a 有_____個。
- (2) 滿足條件之 a 的總和為_____。

21. 如附圖，某人由 A 點出發，沿著路走，不許循原路回頭走，當同一點經過兩次才不再前進，則其共有_____種走法。



22. 求附圖中的三角形，若全等者視成一類，則共有_____類，_____個三角形。



23. 每位數字互異之三位正整數其總和為_____。

24. 2520 之因數有_____個。

25. 全班有學生 n 人，參加 a, b, c 三項測驗，合格人數分別 x, y, z ，二項合格 a 與 b, b 與 c, c 與 a 的人數分別為 23, 25, 22，而 a 或 b, b 或 c, c 或 a 合格人數分別為 45, 43, 44，三項中只有 b 項不合格的人數為 5，則：

- (1) x, y, z 之值分別為_____。
- (2) 三項都合格的人數為_____。
- (3) 若只有 2 人三項都不合格，則 $n =$ _____。

26. 小南有很多 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 的標籤，但是只有 22 個 3，他想利用這些標籤來作一本相簿的頁碼，則他最多可編至第_____頁。

27. 一個大禮堂有六個大門，若甲、乙由不同門進出，且同一人由不同門進出，則甲、乙的出入法有_____種。

28. 取 $u = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 為宇集合，集合 A, B 皆為 u 的子集，已知 $A \cap B = \{5\}$, $A' \cap B = \{1, 4, 8\}$, $A' \cap B' = \{3, 6\}$ ，則集合 $A =$ _____。

29. 某人最多可玩六次輪盤賭，每次他不是贏一元，就是輸一元，此人開始以一元下賭，但在六次未結束以前，如果他輸去所有的錢或他贏 3 元（即手上有 4 元），則停止他再玩，試求所有可能發生的情形有_____種。

30. $n = 21600$ ，問：

- (1) n 之正因數共有_____個，其總和為_____。
- (2) 不大於 n 而與 n 互質之自然數共有_____個。

31. 一室有 6 個門，甲、乙兩人由不同之門進入，再由不同之門出來，且每人不可由同一門進出，則方法共有_____種。

32. 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 之係數為 0、1、3、5、7 相異者，(1) 此二次方程式共有_____種，(2) 此二次方程式中，有_____個其有實根。

台北市立陽明高中 高二下自然組 動手動腦解答

單元：2-1 集合計數 (1)

班級：

座號：

姓名：

1. 答案：(143, 95)

淵子說 $a = (2+1)(3+1)(2+1)(3+1) - 1 = 144 - 1 = 143$

5元有3張，令混淆到10元，故把10元2張改成 \Rightarrow 4張5元，共有 $3+4=7$ 張5元

$b = (2+1)(3+4+1)(3+1) - 1 = 3 \times 8 \times 4 - 1 = 95$

2. 答案：(65, 18)

淵子說 設A表喜好棒球者，B表喜好籃球者

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

(1) $A \subset B: n(A \cap B) = n(A) = 65$ 為最大

(2) $A \cup B = 120, n(A \cap B) = 65 + 73 - 120 = 18$ 為最小

$\therefore (a, b) = (65, 18)$

3. 答案：12

淵子說 設三角形三邊分別有 a, b, c 根火柴 ($a, b, c \in N$ 且 $a \geq b \geq c$)

$\therefore a + b + c = 24$

又 $\begin{cases} a + a + a \geq a + b + c = 24 \Rightarrow a \geq 8 \\ b + c > a \Rightarrow a + b + c > a + a \Rightarrow a < 12 \end{cases}$

$\therefore 8 \leq a < 12$

a	8	9		10				11				
b	8	9	8	10	9	8	7	11	10	9	8	7
c	8	6	7	4	5	6	7	2	3	4	5	6

共12種不全等 \triangle

4. 答案：84

5. 答案：1024

淵子說 走法共 $2^{10} = 1024$ 種

6. 答案：18

淵子說 若50元有2個，則兌法有1種；

若50元有1個，則兌法有6種；

若50元有0個，則兌法有11種；

共 $1+6+11=18$ 種

7. 答案：22

8. 答案：(1) 3380；(2) 960

淵子說 (1) 先塗BE，再塗AD，後塗CF，

$5 \times 4(1 \times 4 + 3 \times 3)(1 \times 4 + 3 \times 3) = 3380$

(2) 二格同色且不相鄰，可為AC, AE, AF, BD, BF, CD, CE, DF 共8種

$8 \times (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 960$

A	D
B	E
C	F

9. 答案：512

10. 答案：36

淵子說 設10元 x 個，50元 y 個，100元 z 張

$\therefore 10x + 50y + 100z = 500, x, y, z \in N \cup \{0\}$

$\therefore x + 5y + 10z = 50$

x	y	z	
0	0	5	$x + 5y = 0 \sim 1$
	2 \sim 0	4	$x + 5y = 10 \sim 3$
	4 \sim 0	3	$x + 5y = 20 \sim 5$
	6 \sim 0	2	$x + 5y = 30 \sim 7$
	8 \sim 0	1	$x + 5y = 40 \sim 9$
	10 \sim 0	0	$x + 5y = 50 \sim 11$

\therefore 共 $1+3+5+7+9+11=36$ 種

11. 答案：150

12. 答案：8

13. 答案：81

14. 答案：24, 1680

15. 答案：343

淵子說 $1000 - \left[\frac{1000}{2} \right] - \left[\frac{1000}{5} \right] - \left[\frac{1000}{7} \right] + \left[\frac{1000}{2 \times 5} \right] + \left[\frac{1000}{5 \times 7} \right] + \left[\frac{1000}{7 \times 2} \right] - \left[\frac{1000}{2 \times 5 \times 7} \right] = 343$

16. 答案：21

淵子說 買了價格「800」的鞋，則送的另一雙有5種方法，
買了價格「700」的鞋，則送的另一雙有2種方法，
 \Rightarrow 共有 $5 \times 3 + 2 \times 3 = 21$ 種

17. 答案：2567

淵子說 1~8999 中

個位數字為0的有899個

十位數字為0的有 89×10 個

百位數字為0的有 8×10^2 個

\therefore 1~8999 中有 $899 + 890 + 800 = 2589$ 個

但需扣除 8877~8999 所出現的0的個數共22個

$\therefore 2589 - 22 = 2567$ 個0

18. 答案：9

淵子說 若只使用一塊綠磁磚，可排出4種不同圖形；

若使用兩塊綠磁磚，可排出4種不同圖形；

若不使用綠磁磚，即全部使用紅磁磚，則有1種圖形；

共 $4+4+1=9$ 種不同圖形

19. 答案：266

20. 答案：(1) 167；(2) 41834

淵子說 $k \in N$ ，若 $a = 6k$ ，則 $a^2 = 6 \cdot 6k^2$ ，若 $a = 6k \pm 1$ ，則 $a^2 = 6(6k^2 \pm 2k) + 1$ ，若 $a = 6k \pm 2$ ，則 $a^2 = 6(6k^2 \pm 4k) + 4$ ，若 $a = 6k \pm 3$ ，則 $a^2 = 6(6k^2 \pm 6k + 1) + 3$
 $\therefore a^2 - 4$ 為6之倍數 $\therefore a = 6k \pm 2$

(1) 若 $a = 6k + 2$ ，則 $k = 0, 1, 2, \dots, 83$ ，若 $a = 6k - 2$ ，則 $k = 1, 2, \dots, 83$ ，故 a 的個數為167

(2) $\sum_{k=0}^{83} (6k+2) + \sum_{k=1}^{83} (6k-2)$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{83} \{ (6k+2) + (6k-2) \} = 2 + 12 \sum_{k=1}^{83} k = 2 + 12 \times \frac{(83+1) \times 83}{2} = 41834$$

21. 答案：18

淵子說 先任選左右其中一條走，則走法有 $2 \times (1+2) = 6$ 種；若從中間路走，則有 $2 \times 3 = 6$ 種；共 $6 \times 2 + 6 = 18$ 種走法

22. 答案：4；44

淵子說 斜邊長為 1 者有 16 個，斜邊長為 $\sqrt{2}$ 者有 16 個，斜邊長為 2 者有 8 個，斜邊長為 $2\sqrt{2}$ 者有 4 個，共有 4 類，44 個三角形

23. 答案：355680

淵子說 個位數是 1~9 的有 $8 \times 8 = 64$ 個；
十位數是 1~9 的有 $8 \times 8 = 64$ 個；
百位數是 1~9 的有 $9 \times 8 = 72$ 個；
總和為 $64 \times (1+2+\dots+9) + 64 \times (1+2+\dots+9) \times 10 + 72 \times (1+2+\dots+9) \times 100 = 355680$

24. 答案：96

淵子說 $2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$
 \therefore 因數有 $2 \times (3+1) \times (2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 96$

25. 答案：(1) 33, 35, 33；(2) 17；(3) 50

淵子說 (1) 令 A, B, C 分別表 a 合格, b 合格, c 合格的人所成的集合

$$x+y=n(A \cap B)+n(A \cup B)=23+45, y+z=25+43, z+x=22+44 \quad \therefore x+y+z=101$$

$$x=33, y=35, z=33,$$

$$(2) \text{三項都合格人數} = n(A \cap B \cap C) = n(A \cap C) - n(A \cap B' \cap C) = 22 - 5 = 17$$

$$(3) n = n(U) = n(A \cup B \cup C) + n(A' \cap B' \cap C) = x+y+z - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) + n(A' \cap B' \cap C) = 101 - 23 - 25 - 22 + 17 + 2 = 50$$

26. 答案：122

淵子說 一位數含 3 者 ~ 1 個

$$\left. \begin{array}{l} \text{二位數含 3 者} \sim 1 \text{ 個 } 3 : \left. \begin{array}{l} \square 3 \sim 8 \\ 3 \square \sim 9 \end{array} \right\} 18 \text{ 個} \\ \text{2 個 } 3 : \left. \begin{array}{l} \square 3 \square \sim 1 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$\therefore 1 \sim 99 \text{ 共用去 } 1+8+9+1 \times 2 = 20 \text{ 個 } 3$$

$$\therefore \text{剩 } 2 \text{ 個 } 3 \text{ 可排 } 103, 113, \text{ 故最多可編至 } 122 \text{ 頁}$$

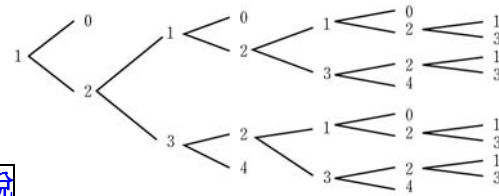
27. 答案：630

淵子說 進門的方法有 $6 \times 5 = 30$ 種，出門的方法有 $(5 \times 5 - 4) = 21$

$$\text{故甲、乙出入大禮堂共有 } 30 \times 21 = 630 \text{ 種。}$$

28. 答案：{2, 5, 7}

29. 答案：15



淵子說

共 15 種

30. 答案：(1) 72, 78120；(2) 5760

淵子說 $n = 21600 = 2^5 \times 3^3 \times 5^2$

(1) 正因數個數有 $6 \times 4 \times 3 = 72$ (個)

$$\text{總和為 } (2^0+2^1+2^2+\dots+2^5)(3^0+3^1+3^2+3^3)(5^0+5^1+5^2) = 78120$$

(2) 所求自然數不得有 2, 3, 5 的因數，共有 21600

$$-\frac{21600}{2} - \frac{21600}{3} - \frac{21600}{5} + \frac{21600}{2 \times 3} + \frac{21600}{3 \times 5} + \frac{21600}{5 \times 2} -$$

$$\frac{21600}{2 \times 3 \times 5} = 5760 \text{ (個)}$$

31. 答案：630

淵子說 (1) 甲、乙進入之方法有 6×5 種

(2) 甲、乙出來之方法有：

① 甲由乙進之門出來 $\Rightarrow 1 \times 5$ 種

② 甲不由乙進之門出來 $\Rightarrow 4 \times 4$ 種

$$\therefore 30 \times (5+16) = 630 \text{ (種)}$$

32. 答案：48, 18