

台北市立陽明高中 高二下自然組 動手動腦

單元：2-1 集合計數 (2)

班級：

座號：

姓名：

1. 某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色球帽不搭配灰色的鞋子，而白色球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有 _____ 種不同款式的「阿民」公仔。

2. $x+3y+8z=38$ 之正整數解 $x、y、z$ 有 _____ 組。

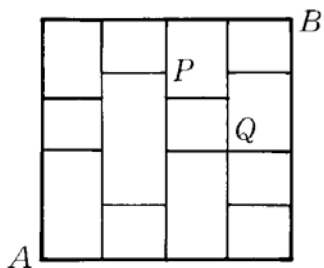
3. $x、y$ 為自然數，且 $x^2+y^2 \leq 20$ ，則 (x,y) 有 _____ 組解。

4. 設一辦公室有 5 門，甲、乙二人由不同門進出此室各一趟，但每人不得由同一門進出，其方法有 _____ 種。

5. 從 1 寫到 1000 共須寫 _____ 個阿拉伯數字。

6. 某班人數 60 人，於第一次月考英文、數學、國文三科中，國文及格者 42 人，英文及格者 41 人，數學及格者 39 人，國英不及格者 11 人，國數不及格者 13 人，英數不及格者 14 人，至少一科不及格者 29 人，則至少有二科不及格者有 _____ 人。

7. 如附圖，自 A 到 B ，沿格子線走，規定只能走“ \uparrow ”，“ \rightarrow ”，“ \downarrow ”三個方向，且路徑不得重複走，則由 A 至 B 之走法有 _____ 種，其中經過 P 且經過 Q 之法有 _____ 種。

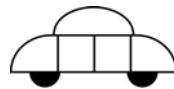


8. 50 人中喜歡喝咖啡的有 28 人，喜歡喝茶的有 37 人，而不喜歡喝茶也不喜歡喝咖啡有 5 人，求喜歡喝咖啡而不喜歡喝茶的有 _____ 人。

9. 三位正整數，全部一次印刷，需要 3 的活字共 _____ 個。

10. 空間中 $x、y、z$ 坐標皆為整數，且與原點距離為 $\sqrt{17}$ 的點，共有 _____ 個。

11. 用 6 種不同顏色塗在附圖之各區域，顏色可重複使用，但相鄰得異色，其塗法數有 _____ 種。



12. 從 1 到 5000 的自然數中，是平方數或是立方數的有 _____ 個。

13. 甲、乙二人參加同一考試，甲作錯全部試題的 $\frac{1}{4}$ ，乙作錯 9 題，而兩人同時作錯的題數為全部試題的 $\frac{1}{6}$ ，若兩人同時作對 n 題 ($n \geq 20$)，則 $n =$ _____。

14. 自 10^3 到 10^6 的自然數中是平方數，但不是立方數者有 _____ 個。

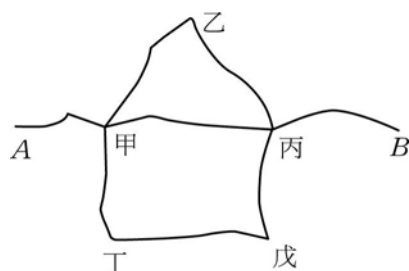
15. 考慮正五邊形及其所有對角線所成的圖形，此圖形中各線段圍成的各種三角形相似者列為一類，共有 m 類，全等者列為一類，共有 n 類，求 $m =$ _____， $n =$ _____，共有 _____ 個三角形。

16. 在 120 個學生中，喜好音樂者有 65 人，喜好體育者有 73 人，則喜好音樂且喜好體育者最多有 _____ 人，最少有 _____ 人。

17. 設 a_1, a_2, \dots, a_{50} 是從 $-1, 0, 1$ 這三個整數中取值的數列。若 $a_1 + a_2 + \dots + a_{50} = 9$ 且 $(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + \dots + (a_{50} + 1)^2 = 107$ ，則 a_1, a_2, \dots, a_{50} 當中有幾項是 0？答：_____。

18. 從 1000 至 1000000 的自然數中，既不是平方數，也不是立方數者有_____個。

19. 如附圖，A 城到 B 城之間有甲、乙、丙、丁、戊五城，其間連結的道路如附圖所示。今從 A 城出發走向 B 城，要求每條道路都要經過並且只經過一次，則總共有_____種走法。

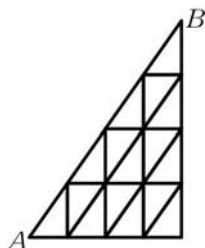


20. 某人最多可玩五次輪盤賭博，每次他不是贏一元就是輸一元，此人開始以一元下注，但在五次未結束前，若他贏了二元（即有三元在手）或手中零元，則停止玩輪盤賭博。

- (1) 能發生之狀況共_____種。
- (2) 五次玩賭前被迫停止之狀況有_____種。
- (3) 輸光的情形有_____種。

21. 有一十字路口，規定不可迴轉，南北向可以左、右轉，但東西向不可左轉，此路口有_____種車流動向。

22. 如附圖，規定可“ \rightarrow ”，“ \uparrow ”，“ \nearrow ”，不可其它方向，則由 A 點至 B 點有_____種不同的走法。



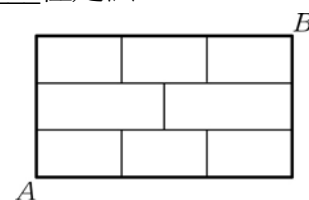
23. 一室有五個門，規定每人不得由同一門進出，若甲、乙、丙三人，任二人由不同門進入及出來，則三人各進出一趟之方法有_____。

24. 設 6048 的正因數中，為完全平方數者有_____個，總和為_____。

25. 某鐵路線共 15 站，其中五站為大站，其餘為小站，今擬將大站與大站間的車票製成紅色，小站與小站間車票製成藍色，其餘為白色，若以（紅，藍，白）代表紅藍白三色車票各有幾種，則（紅，藍，白）=_____。

26. 小於、等於 1000 的自然數中，為完全平方數或完全立方數的有_____個。

27. 如附圖從 A 走捷徑到 B 共有_____種走法。



28. 我國自用小汽車的牌照號碼，前兩位為大寫英文字母，後四位為數字，例如 AB-0950。若最後一位不用 4，且後四位數字沒有 0000 這個號碼，那麼我國可能有的自用小汽車牌號碼有_____個。

29. 1~1000 的自然數中，是 2 或 3 的倍數，但不是 7 的倍數者有_____個。

30. $A = \{x | \sqrt{x} \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 10^6\}$, $B = \{x | x = 20k, k \in \mathbb{Z}\}$, 則 $n(A - B) =$ _____。

31. 平面上 5 條不平行的直線（沒有 3 條直線交於 1 點），共有多少個交點？答：_____。

台北市立陽明高中 高一下自然組 動手動腦解答

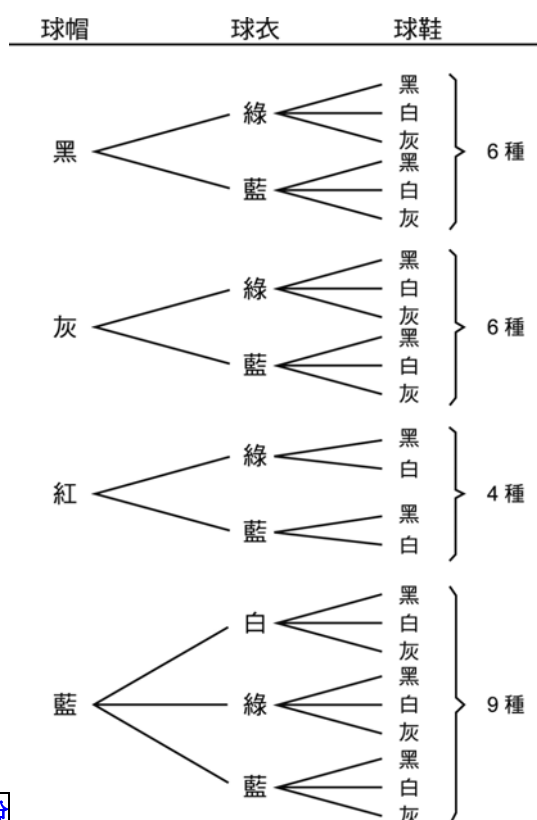
單元：2-1 集合計數 (2)

班級：

座號：

姓名：

1. 答案：25



淵子說

⇒ 共有 $6+6+4+9=25$ 種

2. 答案：21

淵子說 $z=1$ 時 $x+3y=30 \Rightarrow y=1, 2, \dots, 9$
 $z=2$ 時 $x+3y=22 \Rightarrow y=1, 2, \dots, 7$
 $z=3$ 時 $x+3y=14 \Rightarrow y=1, 2, \dots, 4$
 $z=4$ 時 $x+3y=6 \Rightarrow y=1$
 共 21 組

3. 答案：13

淵子說 $x=1, y^2 \leq 19, y=1, 2, 3, 4; x=2, y^2 \leq 16, y=1, 2, 3, 4$
 $x=3, y^2 \leq 11, y=1, 2, 3; x=4, y^2 \leq 4, y=1, 2$
 共有 $4+4+3+2=13$ 組

4. 答案：260

淵子說 先考慮進去時的情況有 5×4 種；
 出來時可分成：
 (1) 甲由乙進的門出，則乙可任選另四門，故有 4 種情況；
 (2) 甲不由乙進的門出，則有 3×3 種情況；
 故方法有 $5 \times 4(4+3 \times 3)=260$ 種

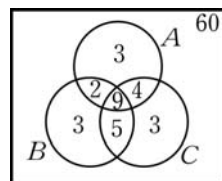
5. 答案：2893

淵子說 一位數的數字有 9 個，二位數的數字有 $99-9=90$ 個，三位數的數字有 $999-99=900$ 個，四位數的數字有 1 個，則共有 $1 \times 9+2 \times 90+3 \times 900+4 \times 1=2893$ 個阿拉伯數字

6. 答案：20

淵子說 設 A 表國文不及格，B 表英文不及格，C 表數學不及格

$$\begin{aligned} \therefore n(A) &= 18, n(B) = 19, n(C) = 21 \\ n(A \cap B) &= 11, n(A \cap C) = 13 \\ n(B \cap C) &= 14, n(A \cup B \cup C) = 29 \\ \therefore n(A \cap B \cap C) &= 29 - 18 - 19 - 21 + 11 + 13 + 14 = 9 \\ \therefore \text{所求} &= 2 + 9 + 4 + 5 = 20 \end{aligned}$$



7. 答案：320；124

淵子說 觀察每次各有幾個可向右的路徑，則可知 A 至 B 的走法有 $4 \times 4 \times 4 \times 5 = 320$ (種)
 分成 $A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow B$ 三段路徑，且經過 P、Q 情況皆分成由上、左、下方進入；
 若從 P 點上方經過 P 點，則情況有： $4 \times (3+5+3) = 44$ 種
 若從 P 點左方經過 P 點，則情況有： $4 \times (2 \times 3+5+3) = 56$ 種
 若從 P 點下方經過 P 點，則情況有： $4 \times 2 \times (1 \times 3) = 24$ 種
 共有 $44+56+24=124$ 種

8. 答案：8

淵子說 喜歡喝咖啡也喜歡喝茶的有： $28+37-(50-5)=20$ (人)；
 則喜歡喝咖啡而不喜歡喝茶的有： $28-20=8$ (人)

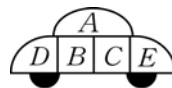
9. 答案：280

淵子說 $\square\square\square \Rightarrow 9 \times 10 = 90$ 個， $\square\square\square \Rightarrow 9 \times 10 = 90$ 個
 $\square\square\square \Rightarrow 10 \times 10 = 100$ 個 $\Rightarrow 90+90+100=280$ 個

10. 答案：48

11. 答案：3000

淵子說 A B C D E
 $6 \times 5 \times 4 \times 5 \times 5 = 3000$



12. 答案：83

淵子說 $1=1^2 < 70^2=4900 < 5000$ ，平方數有 70 個；
 $1=1^3 < 17^3=4913 < 5000$ ，立方數有 17 個；
 $1=1^6 < 4^6=4096 < 5000$ ，是立方數也是平方數的有 4 個；
 則是立方數或平方數的有 $70+17-4=83$ (個)

13. 答案：24 或 35

淵子說 設全部共有 x 題，則依題意可知：
 $\frac{x}{4} + 9 - \frac{x}{6} + n = x, n + 9 = \frac{11}{12}x, n \geq 20, x$ 為 12 之倍數，且 $\frac{x}{6} \leq 9$ ；
 $x=36$ 或 48 ，則 $n=24$ 或 35

14. 答案：962

淵子說 $10^3 \leq 32^2 \leq 1000^2$, 平方數有 $1000 - 32 + 1 = 969$ (個); 是平方數也是立方數的有: $3^6 \leq 10^3 \leq 4^6 \leq 10^6$, 有 $10 - 4 + 1 = 7$ (個); 則所求共有 $969 - 7 = 962$ (個)

15. 答案：2 ; 5 ; 35

16. 答案：65 ; 18

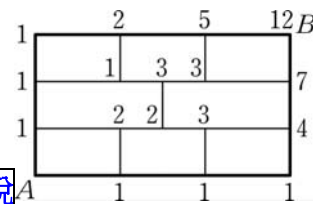
淵子說 $n(\text{音} \cup \text{體}) = n(\text{音}) + n(\text{體}) - n(\text{音} \cap \text{體})$, 且 $n(\text{音}) + n(\text{體}) - n(\text{音} \cup \text{體}) \leq n(\text{音} \cap \text{體}) \leq \min\{n(\text{音}), n(\text{體})\}$; 則 $65 + 73 - 120 \leq n(\text{音} \cap \text{體}) \leq 65$, 故最多 65 人, 最少 18 人

17. 答案：11

淵子說

107 =	1 的項數	0 的項數	-1 的項數	$a_1 + a_2 + \dots + a_{50} =$
$26 \times 2^2 + 3 \times 1^2$	26	3	21	5
$25 \times 2^2 + 7 \times 1^2$	25	7	18	7
$24 \times 2^2 + 11 \times 1^2$	24	11	15	9
.....

276. 答案：12



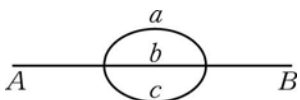
淵子說

⇒ 共 11 項是 0

18. 答案：997948

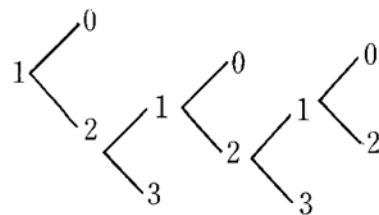
19. 答案：6

淵子說 本題即為附圖由 A 至 B 一筆畫的問題, 考慮 a, b, c 三路徑的排列數 $3! = 6$, 即為解答。



20. 答案：(1) 6 ; (2) 4 ; (3) 3

淵子說 如附圖



21. 答案：10

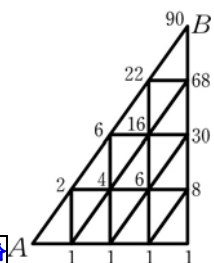


淵子說 南北

東西

共有 $3 + 3 + 2 + 2 = 10$ 種

22. 答案：90



淵子說 共有 90 種走法

23. 答案：1920

淵子說 分成甲由乙進之門出、甲由丙進之門出、甲由另兩門出, 則方法數:

$$P_3^5 \times [1 \times (1 \times 3 + 3 \times 2) + 1 \times (3 \times 3) + 2 \times (1 \times 3 + 2 \times 2)] = 60 \times (9 + 9 + 14) = 1920$$

24. 答案：6 ; 210

淵子說 (1) $6048 = 2^5 \times 3^3 \times 7$, 所以完全平方的正因數為 $2^0, 2^2, 2^4, 3^0, 3^2$ 共 $3 \times 2 = 6$ 個

$$(2) \text{ 它們的平方的正因數和為 } (1+2^2+2^4)(1+3^2) = 210$$

25. 答案：(20, 90, 100)

淵子說 (1) 紅色車票共有 $P_2^5 = 20$

(2) 藍色車票共有 $P_2^{10} = 90$

(3) 白色車票共有 $P_2^{15} - \text{紅色車票} - \text{藍色車票} = 210 - 20 - 90 = 100$

則 (紅, 藍, 白) = (20, 90, 100)

26. 答案：38

淵子說 $1 \leq a^2 \leq 1000 \Rightarrow 1 \leq a \leq 31, 1 \leq b^3 \leq 1000 \Rightarrow 1 \leq b \leq 10$

$1 \leq c^6 \leq 1000 \Rightarrow 1 \leq c \leq 3 \Rightarrow$ 有 $31 + 10 - 3 = 38$ 個

276. 答案：12

28. 答案： $26 \times 26 \times (9000 - 1)$

淵子說 前兩位大寫字母有 26×26 種,

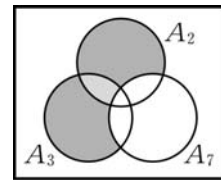
後四位數字有 $10 \times 10 \times 10 \times 9 - 1$ 種

則車牌號碼共有 $26 \times 26 \times (9000 - 1)$ (個)

29. 答案：572

淵子說 設 A_i 表 i 的倍數, $i = 2, 3, 7$

$$\begin{aligned} \therefore \text{所求} &= n(A_2) + n(A_3) - n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_7) \\ &\quad - n(A_3 \cap A_7) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_7) \\ &= 500 + 333 - 166 - 71 - 47 + 23 = 572 \end{aligned}$$



30. 答案：900

31. 答案：10

淵子說 任兩條直線有一交點, 故共有 $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ 個交點