

台北市立陽明高中 高二下自然組 動手動腦

單元:2-1 集合計數&加法和乘法原理(3) 班級:

座號:

姓名:

1. 某人有 5 件不同顏色的襯衫，3 條不同顏色的領帶，請問襯衫與領帶的搭配共有多少種配法？

2. 自然數 1 到 1234 中，數字含有 0 的，有多少個？又從 1 寫到 1234 的自然數中，總共寫了多少個 0？

3. 彩票公司每天開獎一次，從 1、2、3 三個號碼中隨機開出一個。開獎時，如果開出的號碼和前一天相同，就要重開，直到開出與前一天不同的號碼為止。如果在第一天開出的號碼是 3，則在第五天開出號碼同樣是 3 的情況有幾種？

4. 在二位數中，十位數與個位數之差的絕對值為 2 的數，共有幾個？

5. 一張 100 元鈔票兌換成 50 元、10 元或 5 元的硬幣，共有多少種可能的兌換法？

6. 設 A, B, C 為 U 之子集， $n(A \cap B \cap C) = 10$ ， $n(A' \cap B' \cap C') = 5$ ， $n(U) = 45$ ， $n(A) + n(B) + n(C) = 75$ ，若 $x = n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)$ ， $y = n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A))$ ， $z = n(A \cup B) + n(B \cup C) + n(C \cup A)$ ，試求 x, y, z 之值。

7. 在三位數中，百位數與個位數之差的絕對值為 2 的數，共有多少個？

8. 7200 的因數共有多少個？

9. 若同時擲 A, B 兩個骰子，令 (x, y) 表 A 骰子出現點數為 x ， B 骰子出現點數為 y 。

[注意： $(2, 5)$ 表 A 骰子出現 2 點， B 骰子出現 5 點；而 $(5, 2)$ 表 A 骰子出現 5 點， B 骰子出現 2 點，此兩者不同。]

(1) 請將所有 36 組 (x, y) 列出。

(2) 請問這 36 組中 $x=3$ 的有多少組？

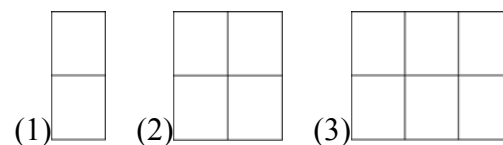
(3) 滿足 $x+y=3$ 的有多少組？請列出。

(4) 滿足 $x=y$ 的有多少組？請列出。

(5) 滿足 $x>y$ 的有多少組？請列出。

10. 若 $n(A) = 8$ ， $n(B) = 4$ ， $n(A \cup B) = 12$ ，請問 A, B 是否不相交？為什麼？

11. 以 5 種不同顏色，塗下列各圖之空格，顏色可重複使用，但相鄰區域不得同色，塗法各若干種



12. 60 人分成三集合 A, B, C ，若 $n(A) = 42$ ， $n(B) = 36$ ， $n(C) = 27$ ， $n(A \cap B \cap C) = 10$

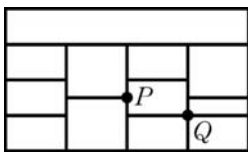
(1) 求 $n(A' \cup B' \cup C') = ?$

(2) $n[(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)] = ?$

(3) 若 $n(A \cap B) = 26$ ，求只在 C 中而不在 A, B 中之元素個數。

13. 如附圖，從 A 走到 B ，只可走 \rightarrow ， \uparrow ， \downarrow ，走過的路不可再走。

- (1) 走法有幾種？
- (2) 經過 P 點有幾種走法？
- (3) 不經過 P ，且不經過 Q 有幾種走法？



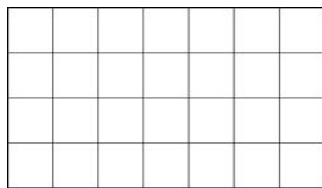
14. 若 $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ， $B = \{1, 3, 5\}$ ，令 $C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ ，請問 $n(C) = ?$

15. 令 $A = \{(x, y) \mid x \leq 9, y \leq 7, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$ ，求 $n(A) = ?$

16. $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 5^2, \text{ 且 } x, y \text{ 皆為非負整數}\}$ ，請問集合 A 的計數是多少？

17. 某女生有上衣 5 件、裙子 4 件、外套 2 件，請問她外出時共有多少種上衣、裙子、外套的搭配法？〔注意：外套可穿也可不穿。〕

18. 如附圖，各小方格為 1cm^2 的正方形。試問圖中大大小小的正方形共有多少個？



19. 令 A 為不大於 100 能被 3 整除的正整數所成集合， B 為不大於 100 能被 5 整除的正整數所成集合，

- (1) 分別求 $n(A)$ ， $n(B)$ ， $n(A \cap B)$ 。
- (2) 利用排容原理求 $n(A \cup B)$ 。

20. 用 1、2、3、4、5 等五個數字所排成的三位數中，數字不重複者共有多少個？

21. 由 1、2、3、4、5、6 六個數字所組成（數字可重複）的四位數中，含有奇數個 3 的共有多少個？

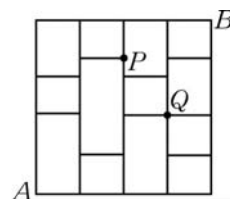
22. 令 A 表從 1 到 50 能被 4 整除的自然數， B 表從 1 到 50 被 4 除餘 1 的自然數， C 表從 1 到 50 被 4 除餘 2 的自然數， D 表從 1 到 50 被 4 除餘 3 的自然數。求各集合的計數。

23. 每次用 20 根相同的火柴棒圍成一個三角形，求共可圍成幾種不全等的三角形。

24. 全班 50 位學生，第一次段考國文 5 位不及格，英文 15 位不及格，數學 20 位不及格；國文、英文兩科不及格者有 3 位，國文、數學兩科不及格者有 2 位，英文、數學兩科不及格者有 8 位；國文、英文、數學三科都不及格者有 1 位，請問國文、英文、數學至少有一科不及格者有幾位？

25. 如附圖，由 A 走至 B ，沿格子線走，規定只能走“ \uparrow ”，“ \rightarrow ”，“ \downarrow ”三個方向，且同一點不得重複經過，試求下列情況之走法數：

- (1) 不經過 P 。
- (2) 經過 P 且經過 Q 。

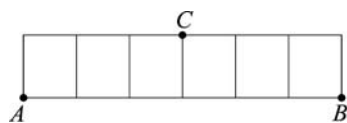


26. 2006 年美國職棒聯盟舉行七戰四勝爭冠，打完第三場時洋基 (Yankees) 以一勝兩敗落後老虎隊 (Tigers)
- (1) 以樹狀圖表示四、五、六、七場有多少種可能情況。
 - (2) 洋基奪冠的情形有多少種 (沒有和局) ?

27. 甲乙兩人參加法律常識測驗，甲答對總題數的 $\frac{2}{3}$ ，甲乙兩人都答對的是總題數的 $\frac{1}{2}$ ，已知乙答對 20 題，試求此項測驗的總題數及甲答對的題數。

28. 50 個學生參加數學測驗，題目分為 A、B、C 三道題，結果答對 A 題者有 37 人，答對 B 題者有 31 人，答對 C 題者有 25 人，而同時答對 A、B 者有 22 人，同時答對 B、C 者有 14 人，同時答對 A、C 者有 17 人，三題均答對者有 8 人，則：
- (1) A、B、C 三題中，至少答對一題者有多少人？
 - (2) A、B、C 三題均答錯者有多少人？
 - (3) A、B、C 三題中，至少答對二題者有多少人？

29. 如圖所示，東西街道有 2 條，南北有 7 條
- (1) 從 A 到 B，每段路不得重複，有多少種走法？
 - (2) 若(1)中的走法，途中通過 C 者有多少種走法？

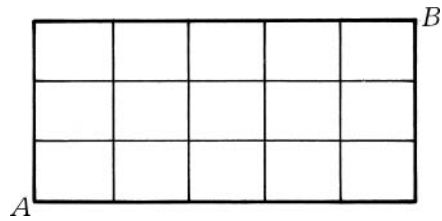


30. 令 $A = \{(x, y) \mid x, y \text{ 皆為非負整數, 且 } 3x + 5y \leq 10, 5x - 3y \leq 8\}$ ，試問集合 A 的計數是多少？

31. 從 1 寫到 999 的正整數中，總共寫了多少個 0 (如 104, 30 等)？

32. 在 xy 坐標平面上， x 坐標小於 10， y 坐標小於 8，且 x, y 坐標都是正整數的點有多少個？

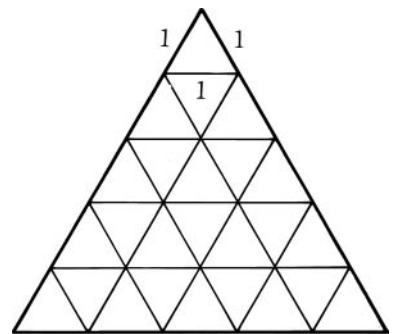
33. 如附圖：



小明由 A 走到 B，若同一點不許經過兩次且走向為 $\rightarrow, \uparrow, \downarrow$ 三種，但不能為 \leftarrow ，則由 A 到 B 的走法共有多少種？

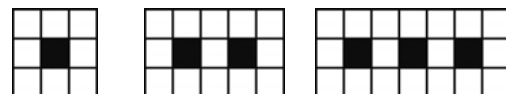
34. 如附圖：

- (1) 面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的三角形有多少個？
- (2) 長度為 1 的線段有多少條？



35. 從 1、2、3、4、5、6、7、8、9 中，任取兩相異數，則其積為完全立方數的取法有幾種？

36. 用黑白兩種正方形地磚，照下列規定拼成若干個圖形



第 1 個 第 2 個 第 3 個

- (1) 拼第 98 個圖需要幾塊黑色地磚？
- (2) 拼第 98 個圖需要幾塊白色地磚？

37. 令 $A = \{(x, y) \mid x, y \text{ 皆為非負整數, 且 } 3x + 5y \leq 10\}$ ，試問集合 A 的計數是多少？

台北市立陽明高中 高一下自然組 動手動腦解答

單元：2-1 集合計數&加法和乘法原理 (3) 班級：

座號：

姓名：

1. 答案：15

淵子說 由乘法原理，共有 $5 \times 3 = 15$ 種配法

2. 答案：(1) 312 個；(2) 343 個

淵子說 (1) 1 到 99 的數字中，含有 0 的有 10、20、...、90 共 9 個

100 到 199 的數字中，含有 0 的有 100、101、...、109、110、120、...、190 共 19 個

200 到 299 的數字也有 19 個含有數字 0

⋮

900 到 999 的數字含 0 的也有 19 個

1000 到 1099 的數字中含有 0 的有 1000、1001...1099 共 100 個

1100 到 1199 的數字中含有 0 的有 1100、1101...1109、1110、1120、...、1190 共有 19 個

1200 到 1234 的數字含 0 的有 1200、1201...1209、1210、1220、1230 共有 13 個

故數字含 0 的有 $9 + 19 \times 9 + 100 + 19 + 13 = 312$ 個

(2) 個位數為 0 的有 10、20...1230 共 123 個

十位數為 0 的有 100、101...1209 共 120 個

百位數為 0 的有 1000、1001、...1099 共 100 個

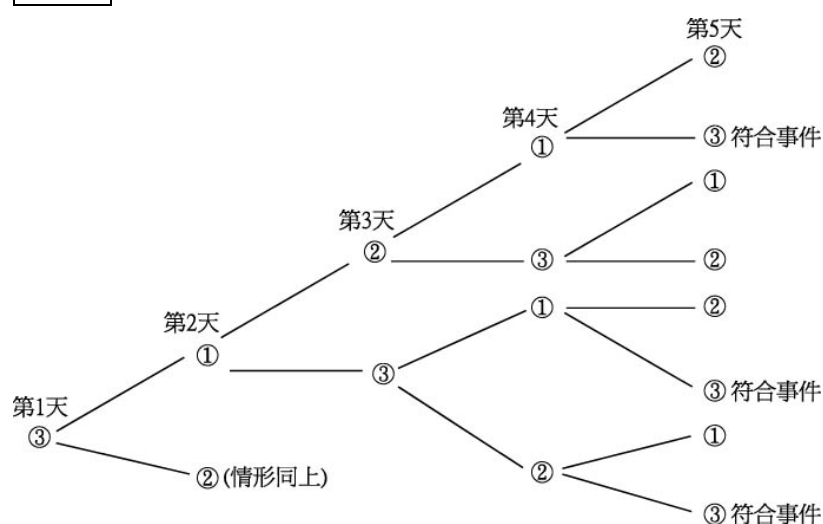
故有 $123 + 120 + 100 = 343$ 個

(註) (1) (另法) 1 到 1234 數字中不含 0 的自然數有 $1 \times 9^3 + 2 \times 9^2 + 3 \times 9 + 4 = 922$ 個

故含 0 的數字有 $1234 - 922 = 312$ 個

3. 答案：6

淵子說



共 6 種

4. 答案：15

淵子說 二位數中，十位數與個位數，數字相差的絕對值為 2 的有 13、24、35、46、57、68、79、20、31、42、53、64、75、86、97 共 15 個

5. 答案：18

淵子說 設 50 元有 x 個，10 元有 y 個，5 元有 z 個，由題意 $50x + 10y + 5z = 100$ 或簡化成 $10x + 2y + z = 20$ ，其中 x, y, z 為非負整數，上式的解討論如下：
當 $x=2$ ，則 $y=0, z=0$ ，

當 $x=1$ ，則 $y=5, z=0$ ；

$y=4, z=2$ ；

$y=3, z=4$ ；

$y=2, z=6$ ；

$y=1, z=8$ ；

$y=0, z=10$ ，

當 $x=0$ ，則 $y=10, z=0$ ；

$y=9, z=2$ ；

⋮

$y=0, z=20$ ，

所以共有 $1 + 6 + 11 = 18$ 種可能兌換法

6. 答案： $x=45, y=25, z=105$

淵子說 $n(A \cup B \cup C) = n(U) - n(A' \cap B' \cap C') = 45 - 5 = 40$

(1) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - \{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} + n(A \cap B \cap C)$

$40 = 75 - x + 10, x = 45$

(2) $y = n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) = n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - \{n((A \cap B) \cap (B \cap C)) + n((B \cap C) \cap (C \cap A)) + n((C \cap A) \cap (A \cap B))\} + n(A \cap B \cap C)$

$= x - 2n(A \cap B \cap C) = 45 - 2 \cdot 10 = 25$

(3) $z = n(A \cup B) + n(B \cup C) + n(C \cup A) = \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} + \{n(B) + n(C) - n(B \cap C)\} + \{n(C) + n(A) - n(A \cap C)\}$

$= 2\{n(A) + n(B) + n(C)\} - x = 2 \cdot 75 - 45 = 105$

7. 答案：150

淵子說 () 若百位為 1，則個位為 3

() 若百位為 n ，且 $2 \leq n \leq 7$ ，則個位為 $n-2$ 或 $n+2$

() 若百位數為 8 (或 9)，則個位數字為 6 (或 7)
由 () () () 得百位數字與個位數字差的絕對值為 2 的共有 15 種

而十位可填 0, 1~9, 10 個數字，所以共有 $15 \times 10 = 150$ (種)

8. 答案：108

淵子說 $7200 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ ，其因數必為 $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ ，其中 $0 \leq a \leq 5, 0 \leq b \leq 2, 0 \leq c \leq 2$ ，且 a, b, c 皆為整數，所以 7200 的正因數共有 $(5+1) \times (2+1) \times (2+1) = 54$

而因數可為負數，故 7200 的因數共有 $2 \times 54 = 108$ 個

9. 答案：(1) 略；(2) 6；(3) 2；(4) 6；(5) 15

淵子說 (1) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6,$

23. 答案：8 種

淵子說 設三邊長為 x, y, z 且 $x \geq y \geq z, x, y, z \in N$

$$\therefore \begin{cases} x+y+z=20 \\ y+z>x \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 2x<20 \\ 3x \geq 20 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{20}{3} \leq x < 10 \text{ 又 } x \in N \quad \therefore x=7, 8, 9$$

- (1) $x=7: (x, y, z)=(7, 7, 6)$
 (2) $x=8: (x, y, z)=(8, 8, 4), (8, 7, 5), (8, 6, 6)$
 (3) $x=9: (x, y, z)=(9, 9, 2), (9, 8, 3), (9, 7, 4), (9, 6, 5)$
 \therefore 共 8 種

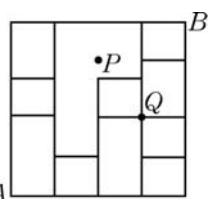
24. 答案：28

淵子說 令 A 為國文不及格學生所成之集合， B 為英文不及格學生所成之集合， C 為數學不及格學生所成之集合，則由題意

$$\begin{aligned} n(A) &= 5, n(B) = 15, n(C) = 20, n(A \cap B) = 3, \\ n(A \cap C) &= 2, n(B \cap C) = 8, n(A \cap B \cap C) = 1, \text{ 所以} \\ n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - \\ & n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 5 + 15 + 20 - \\ & 3 - 2 - 8 + 1 = 28 \text{ (位)} \end{aligned}$$

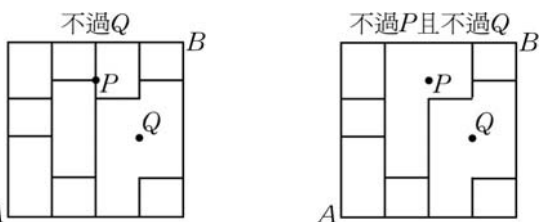
25. 答案：(1) 140；

(2) 124



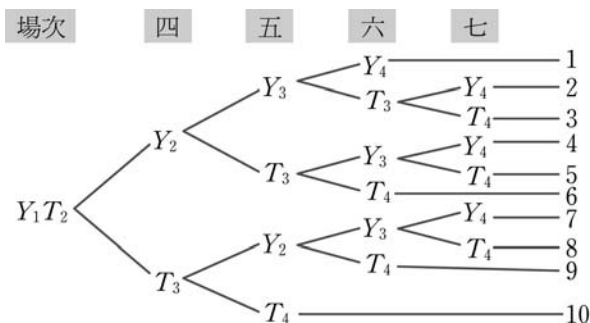
淵子說 (1)

$$\text{不過 } P: 4 \times (1 + 2 \times 3) \times 5 = 140$$



$$\begin{aligned} \text{所求} &= (\text{全}) - (\text{不過 } P) - (\text{不過 } Q) + (\text{不過 } P \text{ 且不過 } Q) \\ &= (4 \times 4 \times 4 \times 5) - 140 - (4 \times 4 \times (2 \times 2 + 1 \times 2)) + \\ & (4 \times 10) = 320 - 140 - 96 + 40 = 124 \end{aligned}$$

26. 答案：(1) 10；(2) 4



淵子說 (1)

- 有 10 種可能
 (2) 洋基奪冠情況有 (1、2、4、7) 4 種

27. 答案：總題數 = 24 時，甲答對 16 題；總題數 = 30 時，甲答對 20 題；總題數 = 36 時，甲答對 24 題；

淵子說 設總題數為 m ， A, B 分別表甲，乙答對的題目所成的集合

$$\text{則 } n(A) = \frac{2m}{3}, \text{ 且 } n(A \cap B) = \frac{m}{2} \quad \therefore m \text{ 為 } 3, 2 \text{ 的公}$$

倍數，令 $m=6k$ ，

$$\text{則 } n(A) = 4k, n(A \cap B) = 3k, n(A - B) = k, n(B - A) = 20 - 3k$$

$$n(A' \cap B') = 6k - n(A \cup B) = 6k - (k + 20) = 5k - 20$$

$$\therefore n(B - A) = 20 - 3k \geq 0, \text{ 且 } n(A' \cap B') = 5k - 20 \geq 0$$

$$\therefore 4 \leq k \leq \frac{20}{3}, \text{ 即 } k=4, 5, 6$$

當 $k=4$ 時，總題數 $m=6k=24$ ，甲答對題數為 $4k=16$

當 $k=5$ 時，總題數 $m=30$ ，甲答對的題數為 $4k=20$

當 $k=6$ 時，總題數 $m=36$ ，甲答對的題數為 $4k=24$

28. 答案：(1) 48 人；(2) 2 人；(3) 37 人

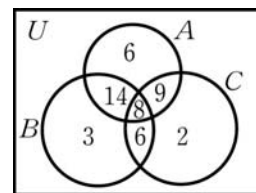
淵子說 $n(A)=37, n(B)=31, n(C)=25, n(A \cap B)=22,$

$$n(B \cap C) = 14, n(C \cap A) = 17, n(A \cap B \cap C) = 8$$

$$\therefore (1) n(A \cup B \cup C) = 37 + 31 + 25 - 22 - 14 - 17 + 8 = 48 \text{ 人}$$

$$(2) n(A' \cap B' \cap C') = n(U) - n(A \cup B \cup C) = 50 - 48 = 2 \text{ 人}$$

$$(3) n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 2n(A \cap B \cap C) = 37 \text{ 人}$$

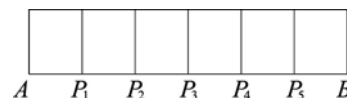


29. 答案：(1) 64 種；(2) 48 種

淵子說 (1) $A \rightarrow P_1$ 有 2 種走法

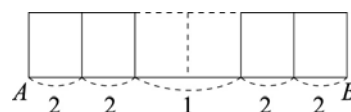
$$\left. \begin{array}{l} P_1 \rightarrow P_2 \\ P_2 \rightarrow P_3 \\ \vdots \\ P_5 \rightarrow B \end{array} \right\} \text{ 各有 2 種走法}$$

$$\therefore \text{乘法原理 } A \rightarrow B \text{ 走法有 } 2^6 = 64 \text{ 種}$$



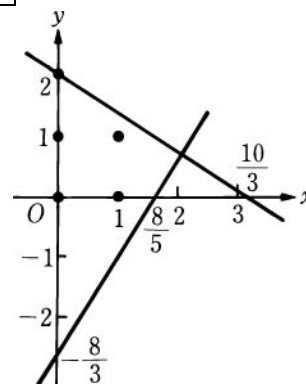
(2) 過 C 點之道路拆除， $A \rightarrow B$ 不經過 C 點有 $2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 = 16$ 種

\therefore 故所求為 $64 - 16 = 48$ 種



30. 答案：5

淵子說 畫圖：



$A = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1)\}$,
故 $n(A) = 5$

31. 答案：189

淵子說 1 到 99 的數字含 0 的有 10, 20, ..., 90 共 9 個 0,
100 到 199 有 100, 101, 102, ..., 109, 110, 120, ...,
190 共 20 個 0,
200 到 299 也有 20 個 0,

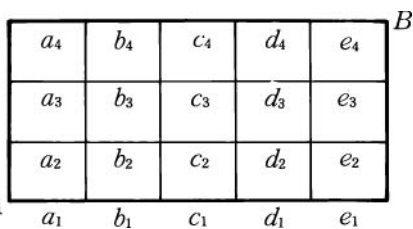
⋮

900 到 999 也有 20 個 0,
所以共有 $9 + 9 \times 20 = 189$ 個 0

32. 答案：63

淵子說 x 坐標有 1~9, y 坐標有 1~7, 所以由乘法原理, 共有 $9 \times 7 = 63$ 個

33. 答案：1024



淵子說

由 A 到 B 必經過 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 4 段中之 1 段, 同樣必經過 $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ 4 段中之 1 段, $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ 4 段中之 1 段, $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ 4 段中之 1 段, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 4 段中之 1 段, 故走法有 $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$ (種)

34. 答案：(1) 25 ; (2) 45

淵子說 (1) 面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的三角形, 最上方的第一層有 1 個, 第二層有 3 個, 第三層有 5 個, 第四層有 7 個, 第五層有 9 個, 所以共有面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的三角形 $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ (個)

(2) 長度為 1 的線段, 左斜有 $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ 條, 同理, 右斜的線段也有 15 條, 水平的線段有 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ 條, 故共有 $3 \times 15 = 45$ 條長度為 1 的線段

35. 答案：3

淵子說 從 1~9 中任取 2 個相異數, 其最小值為 $2(1 \times 2)$,

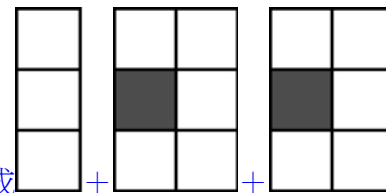
最大值為 $72(9 \times 8)$, 所以只要找出 2 至 72 之間的立方數, 共有 $2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64$,

$8 = 1 \times 8 = 2 \times 4, 27 = 3 \times 9, 64 = 2 \times 32 = 4 \times 16 = 8 \times 8$,

64 不合乎題意,

所以只有三種 $1 \times 8, 2 \times 4$ 與 3×9

36. 答案：(1) 98 ; (2) 493



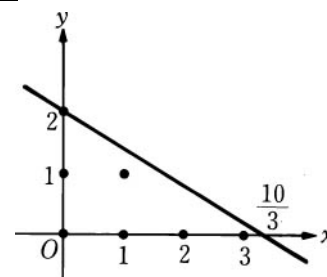
淵子說 分成 $1 + 3 + 5 + \dots$

(1) 拼到 98 個, 要 98 塊黑色

(2) 白色: $3 + 5 + 5 + 5 + \dots = 3 + 5 \times 98 = 493$

37. 答案：7

淵子說 如附圖:



A 為坐標是非負整數且在直線 $3x + 5y = 10$ 左下方的格子點, 即 $A = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0), (3,0)\}$, 故 $n(A) = 7$