

台北市立陽明高中 高二下自然組 動手動腦

單元：2-4 組合 (3)

班級：

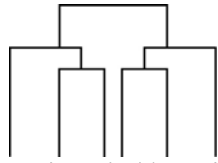
座號：

姓名：

1. 求 $xyz=720$ 的正整數解有多少個？答：_____。

2. 坐標平面上，沿格子線從 $A(0,0)$ 出發取捷徑走到 $B(6,5)$ ，問恰轉四次彎之走法有_____種。

3. 附圖為六人羽球賽之單淘汰賽程表，則賽程安排之方法有_____種。



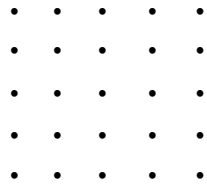
4. 在數線上有一個運動物體從原點出發，在此數線上跳動，每次向正方向或負方向跳一個單位，跳動過程可重複經過任何一點，若經過 8 次跳動後運動物體落在點 +4 處，則此運動體共有_____種不同的跳動方法。

5. 數線上一運動體從原點出發，向正或負方向每次跳一個單位，可重複經過任何一點。若跳 6 次後落在 +2 處，則有_____種跳法。

6. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6 這 6 個整數中任取 2 個不同的數相乘，其乘積有多少種可能？答：_____。

7. 如附圖共有二十五個點，則

- (1) 連結出_____條直線。
 (2) 可作出_____個三角形。



8. 已知 $P_3^n : C_3^{n+1} = 15 : 4$ ，則 n 之值_____。

9. $a=10!$ ， $b=P_2^{10}$ ， $c=10^{10}$ ， $d=C_{10}^{10}$ ， $e=2^{10}$ ，列出其大小順序為_____。

10. 長方體中，互為歪斜線的稜線共有_____對。

11. 警報器長鳴一次需 3 秒，短鳴一次需 1 秒，中間間隔 2 秒，則 30 秒內可有_____種不同信號。

12. 在坐標平面上自點 $A(-4, -3)$ 沿方格紙之邊，取捷徑到達點 $B(2, 3)$ ，則經過第二象限之走法有_____種。

13. 滿足 $xyz=4000$ 之所有整數解 (x, y, z) 共有_____組。

14. 學校在校慶舉辦烹飪比賽，每隊 8 人，且男女至少各 2 人。本班有 4 男 7 女舉手報名，請問聰明的你，可知有_____種組隊方法。

15. 在數線上有一個運動物體從原點出發，在此數線上跳動，每次向正方向或負方向跳 1 個單位，跳動過程可重複經過任何一點。若經過 6 次跳動後運動物體落在點 +4 處，則此運動物體共有_____種不同的跳動方法。

16. 在三位數中，百位數與個位數之差的絕對值為 2 的數，共有_____個。

17. 袋中有七個白球，若干個黑球。今從袋中一次取出兩個球，已知此兩球同為白球的機率是 $\frac{7}{22}$ 。請問袋中有幾個黑球？

18. $xyz=2160$ 之整數解有_____組。

19. 12 位委員投票選一位主任委員，候選人有 2 位，採記名投票，每一位委員都投票

(1) 無廢票，共有_____種投票結果。

(2) 若有廢票，則共有_____種投票結果。

20. 有一片長方形牆壁，尺寸為 12×1 (即：長 12 單位長，寬 1 單位長)。若有許多白色及咖啡色壁磚，白色壁磚尺寸為 2×1 ，咖啡色壁磚尺寸為 4×1 ，用這些壁磚貼滿此長方形，問可貼成幾種不同的圖案？答：_____種。

21. 將 9 件不同的玩具，分給三人，其中二人各得 4 件，另一人得一件，則有_____種分法。

22. 某人手邊有 5 封信及 5 個信封，今突然停電，即隨手任意將信裝入信封中 (每封信裝入一個信封)，則恰有 3 封裝錯之方法有_____種。

23. 由 1, 2, 3, 4, 5 這 5 個數字取 4 個，寫成四位數，請問“千位數字 < 百位數字 < 十位數字 < 個位數字”的排法有多少種？答：_____。

24. 以 3 個 1, 3 個 0, 2 個 5 排成 8 位數，可得_____個不同之 8 位數。

25. 欲將八位新生平均分發到甲、乙、丙、丁四班，共有_____種分法。

26. 第一次月考後，本班有 8 位同學決定轉去社會組 (第一類組)，但本校社會組有 4 班，平均每班可接受 2 位，請問教務處有_____種安排方法。

27. 甲、乙、丙、...等九人組成三隊，參加 3 對 3 鬥牛籃球賽，則甲、乙二人不在同一隊之方法數有_____種。
28. 方程式： $x+y+z+w=10$
 (1) 不為負的整數解有_____組。
 (2) 正整數解有_____組。
29. 某班 8 位學生去冷飲店，該處共有 6 種飲料供應，每人各點選一種飲料，結果店員拿出 5 種不同飲料，則店員拿出飲料之方法有_____種。
30. 求 $C_0^3 + C_1^4 + C_2^5 + \dots + C_{16}^{19} = C_r^n$ ， $(n, r) =$ _____。
31. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 九個阿拉伯數字中，選出 4 個相異的數字來，所選出來的 4 個數字中，任兩個均不連續的情形共有_____種。
32. 從 1 到 20 的自然數中，取出不同的三個數，則(1) 取出的三數成等差的取法(不考慮排列)有_____種；(2) 取出的三數中，沒有二個連續整數的取法有_____種。
33. 五件相異物，全部分給甲乙丙三人，每人至少一件之分法有_____種。
34. 啦啦隊競賽規定每隊 8 人，且每隊男、女生均至少要有 2 人。某班共有 4 名男生及 7 名女生想參加啦啦隊競賽。若由此 11 人中依規定選出 8 人組隊，則共有_____種不同的組隊方法。
35. 從一堆 1 元，5 元，10 元，50 元硬幣中任取 6 個，共有多少不同的組合？答：_____。
36. 某拳擊比賽，規定每位選手必須和所有其他選手各比賽 1 場，賽程總計為 78 場，則選手人數為_____人。
37. 一列火車從第一車到第十車共有十節車廂，要指定其中三節車廂准許吸煙，則共有_____種指定方法。若更要求此三節准許吸煙的車廂，兩兩不相銜接，則共有_____種指定方法。
38. 有 6 個人參加耶誕晚會，分別攜帶一份禮交換，若每人都都不帶自己的禮物回家，則共有_____種方法。
39. 在空間中， x, y, z 坐標皆為整數，且與原點距離為 $\sqrt{17}$ 的點，一共有_____個。
40. 若 r 為正偶數且 $C_4^{12} + C_7^{12} = C_r^{13}$ ，則 $r =$ _____。
41. 將 5 個相同白球，7 個相同紅球，6 個相同黑球裝入四個不同的箱子，每箱至少裝入白球、紅球、黑球各一個之方法有_____種。
42. 因乾旱水源不足，自來水公司計畫在下週一至週日的 7 天中選擇 2 天停水，則所選擇停水的 2 天不相連之方法數有_____種。
43. 從二位日本人，三位中國人，三位英國人中任選三人，則中國人至少二人之方法有_____種。
44. 將 9 件不同物，按 2、2、5 比例分給甲、乙、丙三人且甲必得 2 件之方法有_____種。
45. 從一個 10 人的俱樂部，選出一位主任，一位幹事和一位會計，且均由不同人出任，如果 10 人中的甲君和乙君不能同時被選上，那麼總共有_____種選法。
46. 將「我為人人，人人為我」八個字全取排列
 (1) 任二個「人」不相鄰之排列數為_____。
 (2) 「我我為為」任二字不相鄰的排列數為_____。
47. 5 種顏色可用來漆房間的四面牆壁，若相鄰的牆壁不能同色，共有多少種漆法？答：_____。
48. 設 $C_r^{n-1} : C_r^n : C_r^{n+1} = 6 : 9 : 13$ ，求 $(n, r) =$ _____。
49. 將 10 件相同的玩具分給甲、乙、丙三人，其中一人至少得一件，一人至少得二件，另一人至少得三件之分法有_____種。
50. 從一副撲克牌中取出 10, J, Q, K, A, 2 等 6 個點數，各四種花色。由這 24 張牌中，任取 5 張恰好為 *full house* (即 a, a, b, b, b) 之情形有_____種。

台北市立陽明高中 高二下自然組 動手動腦解答

單元：2-4 組合 (3)

班級：

座號：

姓名：

1. 答案：270

淵子說 $xyz=720=2^4 \times 3^2 \times 5$ ，即將 4 個 2，2 個 3，1 個 5 分給 $x、y、z$
 $H_4^3 \cdot H_2^3 \cdot H_1^3 = C_4^6 \cdot C_2^4 \cdot C_1^3 = 270$

2. 答案：70

淵子說 可分成 $(\rightarrow \uparrow \rightarrow \uparrow \rightarrow)$ 、 $(\uparrow \rightarrow \uparrow \rightarrow \uparrow)$ 兩種情況，其中 \rightarrow 共 6 格， \uparrow 共 5 格，每次至少一格；
 則走法有： $H_3^3 H_3^2 + H_4^2 H_2^3 = 70$

3. 答案：90

淵子說 $\frac{C_3^6 \cdot C_3^3}{2!} \times C_1^3 \times C_1^3 = 90$

4. 答案：28

淵子說 設向右 x 次，向左 $(8-x)$ 次 $\therefore x+(8-x) \cdot (-1) = 4 \Rightarrow x=6$
 即向右 6 次，向左 2 次 $\therefore \frac{8!}{6!2!} = 28$ (種)

5. 答案：15

淵子說 設正向跳 x 次，負向跳 y 次，
 $\Rightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases} \quad x=4, y=2, \text{ 有 } \frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ 種}$

6. 答案：14

淵子說 $2 \times 3 = 1 \times 6$ ，需扣掉乘積相同的這一組，則有 $C_2^6 - 1 = 14$ 種可能

7. 答案：(1) 93；(2) 1056

8. 答案：7

淵子說 $4n(n-1)(n-2) = 15 \cdot \frac{(n+1) \cdot n(n-1)}{3!}$
 $\therefore 8(n-2) = 5(n+1) \quad \therefore n=7$

9. 答案： $c > a > e > b > d$

淵子說
 $a=10 \times 9 \times \dots \times 2 \times 1$ ； $b=10 \times 9$ ； $c=10 \times 10 \times \dots \times 10 \times 10$ ； $d=1$ ； $e=2 \times 2 \times \dots \times 2 \times 2$ ；
 其大小順序為 $c > a > e > b > d$

10. 答案：24

淵子說
 每一稜線各有 4 條稜線與之歪斜，則共有 $\frac{4 \times 12}{2} = 24$ 對互為歪斜線的稜線

11. 答案：80

淵子說
 設長鳴 x 次，短鳴 y 次，間隔 $x+y-1$ 次
 $\Rightarrow 3 \cdot x + 1 \cdot y + 2 \cdot (x+y-1) = 30, 5x+3y=32$

x	1	4
y	9	4

共有 $\frac{10!}{9!} + \frac{8!}{4!4!} = 10 + 70 = 80$ 種

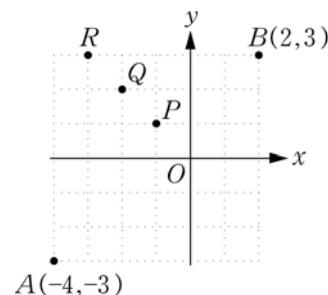
12. 答案：462

淵子說 ① $A \rightarrow P \rightarrow B: \frac{7!}{3!4!} \times \frac{5!}{2!3!} = 350$

② $A \rightarrow Q \rightarrow B: \frac{7!}{2!5!} \times \frac{5!}{4!} = 105$

③ $A \rightarrow R \rightarrow B: \frac{7!}{6!} \times 1 = 7$

\therefore 所求 = $350 + 105 + 7 = 462$ (種)



13. 答案：840

14. 答案：161

淵子說
 (男, 女) 有 $(2, 6)、(3, 5)、(4, 4)$ 三種方法
 $\Rightarrow C_2^4 \times C_6^7 + C_3^4 \times C_5^7 + C_4^4 \times C_4^7 = 6 \times 7 + 4 \times 21 + 1 \times 35 = 161$

15. 答案：6

淵子說 經過 6 次跳動後，運動物體落在 +4 處 \Leftrightarrow 跳動 5 次 +1，1 次 -1。
 故共有 $\frac{6!}{5!1!} = 6$ 種不同的跳動方法。

16. 答案：150

淵子說 令三位數為 abc ，則 $(a, c) = (1, 3), (8, 6), (9, 7)$ ，當 $a=2, 3, 4, 5, 6, 7$ 時， c 各有二種， $b=0, 1, 2, \dots, 9$ ，故 $(3+6 \times 2) \times 10 = 150$

17. 答案：5 個

淵子說 設黑球有 x 個，則 $\frac{C_2^7}{C_2^{x+7}} = \frac{7}{22} \Rightarrow$
 $\frac{\frac{7 \times 6}{2}}{\frac{(x+7)(x+6)}{2}} = \frac{7}{22}$

$\Rightarrow (x+7)(x+6) = 132 \Rightarrow x^2 + 13x - 90 = 0$
 $\Rightarrow (x+18)(x-5) = 0 \quad \therefore x=5$ 或 -18 (不合) \therefore 黑球有 5 個

18. 答案：1800

淵子說 $xyz=2160=2^4 \times 3^3 \times 5$
 $\begin{cases} x=2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1} \\ y=2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2} \\ z=2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 3 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \end{cases}$ 之非負整數解
 又考慮 $x、y、z$ 之正負
 $\begin{matrix} +, +, + \\ +, -, - \\ -, +, - \\ -, -, + \end{matrix}$
 $\therefore 4 \times H_4^3 \times H_3^3 \times H_1^3 = 4 \times 15 \times 10 \times 3 = 1800$

19. 答案：(1) 4096；(2) 3^{12}

淵子說
 (1) $2^{12} = 4096$
 (2) 每個人可能投給其中一位候選人，也可能投廢票，

有三種可能；故共有 3^{12} 種投票結果

20. 答案： 13

淵子說 咖啡色有 3 塊，則有 1 種圖案；

咖啡色有 2 塊，則白色也 2 塊，有 $\frac{4!}{2!2!}=6$ 種圖案；

咖啡色有 1 塊，則白色有 4 塊，有 $\frac{5!}{1!4!}=5$ 種圖案；

白色有 6 塊，則有 1 種圖案；

共 $1+6+5+1=13$ 種不同圖案

21. 答案： 1890

淵子說 $\frac{C_4^9 C_4^5 C_1^1}{2!} \times 3! = 1890$ (種)

22. 答案： 20

淵子說 $C_3^5 \cdot (3! - 3 \times 2! + 3 \times 1! - 0!) = 20$

23. 答案： 5

淵子說 有 1234、1235、1245、1345、2345 共 5 種

24. 答案： 350

淵子說 任排 (以 0 為首)： $\frac{8!}{3!3!2!} - \frac{7!}{3!2!2!} = 350$

25. 答案： 2520

淵子說 $C_2^8 C_2^6 C_2^4 C_2^2 = 2520$

26. 答案： 2520

淵子說 先分成 4 組，再分班級 $\Rightarrow \frac{C_2^8 \times C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2}{4!} \times 4! = 2520$

27. 答案： 210

淵子說 $\frac{C_2^7 \times C_2^5 \times C_3^3}{2!} \times 2! = 210$

28. 答案： (1) 286；(2) 84

淵子說 (1) $H_{10}^4 = C_{10}^{13} = 286$ (2) $10 - 4 = 6, H_6^4 = C_6^9 = 84$

29. 答案： 210

淵子說 $C_5^6 \cdot H_{8-5}^5 = C_5^6 \cdot C_3^7 = 210$

30. 答案： (20, 16)

淵子說 原式 $= C_0^4 + C_1^4 + C_2^4 + \dots + C_{16}^{19} = C_1^5 + C_2^5 + \dots + C_{16}^{19} = C_2^6 + C_3^6 + \dots + C_{16}^{19} = \dots = C_{15}^{19} + C_{16}^{19} = C_{16}^{20}$
 $\Rightarrow (n, r) = (20, 16)$

31. 答案： 15

淵子說 全部列出，則有 (1, 3, 5, 7~9), (1, 3, 6, 8~9), (1, 3, 7, 9), (1, 4, 6, 8~9), (1, 4, 7, 9), (1, 5, 7, 9), (2, 4, 6, 8~9), (2, 4, 7, 9), (2, 5, 7, 9), (3, 5, 7, 9) 共 15 種

32. 答案： 90, 816

33. 答案： 150

淵子說 全部 - (一人沒有) + (二人沒有)： $3^5 - 3 \times 2^5 + 3 \times 1^5 = 150$

34. 答案： 161

淵子說 可能情形為 4 男 4 女，3 男 5 女，2 男 6 女
 \therefore 方法有 $C_4^4 C_4^7 + C_3^4 C_5^7 + C_2^4 C_6^7 = 35 + 84 + 42 = 161$ (種)

35. 答案： 84

淵子說 所求即為 $x+y+z+u=6$ 的非負整數解，則有 $H_6^4 = C_6^9 = 84$

36. 答案： 13

淵子說 設選手有 n 人，則 $n(n-1) = 78 \times 2, (n-13)(n+12) = 0, n = 13$ or -12 ，則選手有 13 人

37. 答案： 120, 56

38. 答案： 265

淵子說 $6! - C_1^6 \times 5! + C_2^6 \times 4! - C_3^6 \times 3! + C_4^6 \times 2! - C_5^6 \times 1! + C_6^6 \times 0! = 265$

39. 答案： 48

淵子說 $x^2 + y^2 + z^2 = 17$ ，可能情況有 (0, ±1, ±4), (±2, ±2, ±3)，共有 $2^2 \times 3! + 2^3 \times 3 = 48$ 個

40. 答案： 8

淵子說 $C_4^{12} + C_7^{12} = C_4^{12} + C_5^{12} = C_5^{13} = C_8^{13}, r = 8$ (r 不可取為 5, r 為偶數)

41. 答案： 800

淵子說 將白、紅、黑球各一個裝箱後，剩下 1 個白球，3 個紅球，2 個黑球任意裝；則方法數有 $H_1^4 H_3^4 H_2^4 = 800$

42. 答案： 15

淵子說 $\begin{matrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{matrix} C_2^6 = 15$

43. 答案： 16

淵子說 $C_2^3 \times C_1^5 + C_3^3 = 16$ (種)

44. 答案： 1512

淵子說 $\frac{C_2^9 \cdot C_2^7 \cdot C_5^5}{2!} \times 2 \times 2! = 1512$

45. 答案： 672

淵子說 全部 - 甲乙同時選上： $C_3^{10} \cdot 3! - C_1^8 \cdot 3! = 720 - 48 = 672$

46. 答案： (1) 30；(2) 30

淵子說 (1) 先排「我我為為」，再排「人人人人」， $\frac{4!}{2!2!} \times 5 = 30$

(2) 先排「人人人人」，再排「我我為為」， $1 \times 5 \times \frac{4!}{2!2!} = 30$

47. 答案： 260

淵子說 先任選其中一面牆，若與之相對的牆圖同色，則有 $5 \times 4 \times 4 = 80$ 種；若與之相對的牆塗不同色，則有 $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ 種，共 260 種塗法

48. 答案： (12, 4)

淵子說 由 C 的定義，可知 $\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} : \frac{n!}{r!(n-r)!} : \frac{(n-1)!}{r!(n+1-r)!} = 6 : 9 : 13$

即 $1 : \frac{n}{n-r} : \frac{n(n+1)}{(n-r)(n+1-r)} = 6 : 9 : 13$ ；

$\frac{n}{n-r} = \frac{3}{2}, n = 3r$ ，代入 $\frac{n(n+1)}{(n-r)(n+1-r)} = \frac{13}{6}$ ，可得 $r = 4$ ，則 $(n, r) = (12, 4)$

49. 答案： 33

50. 答案： 720

淵子說 $C_1^6 \times C_3^4 \times C_1^5 \times C_2^4 = 720$ 種