

台北市立陽明高中 高二自然組 動手動腦

單元：B4-3-6 信賴區間與信心解讀2

班級：

座號：

姓名：

一、多選題：

() 1. 有100個同學，各丟一次硬幣，得40個正面，60個反面，則下列敘述何者正確？

(A) 出現正面比率 $\hat{p} = \frac{40}{100} = 0.4$

(B) 丟硬幣1次出現正面的標準差 S 為

$$\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} = \sqrt{0.4 \times 0.6} = \sqrt{0.24} \approx 0.49$$

(C) 95%信心水準的最大誤差

$$e = 2 \times \frac{S}{\sqrt{n}} = 2 \times \frac{0.49}{\sqrt{100}} = 0.098$$

(D) 出現正面比率 p 的95%信賴區間為

$$[0.6 - 0.098, 0.6 + 0.098] = [0.502, 0.698]$$

(E) 出現正面比率 p 的95%信賴區間為 $[0.302, 0.498]$

() 2. 民意代表選舉，在95%信心水準下，視誤差值來決定該至少抽樣多少人。誤差值 $\pm 1\%$ 下抽 x 人，誤差值 $\pm 2\%$ 下抽 y 人，誤差值 $\pm 3\%$ 下抽 z 人，且已知 $\hat{p}(1-\hat{p}) = -\hat{p}^2 + \hat{p} = -(\hat{p} - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} \leq \frac{1}{2}$ ，則

(A) $x = 12000$ (B) $y = 2501$ (C) $x + y > 35000$

(D) $z = 1100$ (E) $z < 1200$

() 3. 下列何者為真？

(A) 調查人數愈多，估計愈準確，所以取的樣本愈多愈好

(B) 信賴區間會隨著你抽取的樣本不同而所有不同

(C) 信心水準愈大，則最大誤差愈大

(D) 若抽取 n 個樣本數，則 \hat{p} 的標準差：

$$\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

(E) 信心水準95%，其最大誤差 $e = 2 \times$

$$\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}$$

() 4. 附圖是根據100名婦女的體重所作出的直方圖(圖中百分比數字代表各體重區間的相對次數，其中各區間不包含左端點而包含右端點)。該100名婦女體重的平均數為55公斤，標準差為12.5公斤。曲線 N 代表一常態分佈，其平均數與標準差與樣本值相同。在此樣本中，若定義「體重過重」的標準為體重超過樣本平均數2個標準差以上(即體重超過80公斤以上)，則下列敘述哪些正確？

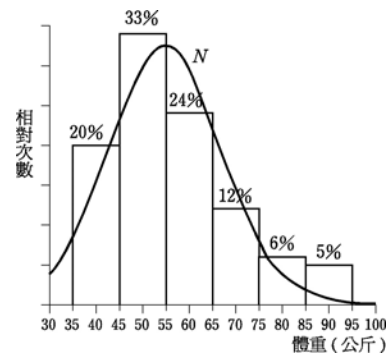
(A) 曲線 N (常態分佈) 中，在55公斤以上所佔的比例約為50%

(B) 曲線 N (常態分佈) 中，在80公斤以上所佔的比例約為2.5%

(C) 該樣本中，體重的中位數大於55公斤

(D) 該樣本中，體重的第一四分位數大於45公斤

(E) 該樣本中，「體重過重」(體重超過80公斤以上)的比例大於或等於5%



二、單選題：

() 1. 調查64位同學中有32位同學贊成畢業旅遊地點，在95%信心水準下，贊成比率 p 的信賴區間為
(A) $[0.4, 0.6]$ (B) $[0.375, 0.625]$ (C) $[0.425, 0.575]$ (D) $[0.425, 0.525]$ (E) 以上皆非

() 2. 若有10位同學丟硬幣出現正面、反面如下：正反反反，正正反反反；試求出現正面比率 p 的標準差估計為何？

(A) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ (B) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ (C) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (E)

$\frac{1}{2}$

() 3. 若有10位同學丟硬幣出現正面、反面如下：正反反反，正正反反反；試求出現正面比率 p 的95%信心水準的最大誤差約

(A) 0.48 (B) 0.15 (C) 0.31 (D) 0.65 (E) 0.75

() 4. 調查100位同學中有20位有異性友人，在95%信心水準下求最大誤差 e 為

(A) 0.04 (B) 0.05 (C) 0.06 (D) 0.07 (E) 0.08

三、填充題：

1. 本校學生身高標準差為6公分，在95%信心水準下，使最大誤差 e 小於或等於0.3公分，則至少要取樣本人數 _____ 人。

2. 在某一生產線做不良率的檢驗，分別各請甲、乙兩檢驗公司做檢驗，已知甲、乙檢驗公司分利各抽320、500個樣品，若兩次檢驗之不良率相同，則甲公司所得95%信賴區間長度是乙公司長度的 _____ 倍。

3. 某人想要了解某地區高中學生，使用南北牌教科書的使用情形，而誤差在 ± 0.02 之間，問他所選擇的樣本需 _____ 人。

4. 全校1000人，分數成常態分配，已知有160人在64分以下，有25人在88分以上，則算術平均數 \bar{x} ，標準差 S ，分別為_____。
5. 抽樣100位同學，平均體重50公斤，標準差 $S=6$ 公斤，在95%信心水準下最大誤差 $e=_____$ 公斤。
6. 班上抽樣9人，資料分別為6，8，10，12，13，14，14，15，16，且標準差 $S=2$ ，在95%信心水準下，求平均分數的信賴區間_____。（小數點第二位）
7. 調查1600人，有320人贊成，求贊成比率 p 的99.7%信賴區間_____。（已知99.7%的 $e=3 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ ）
8. 在某K中任意抽64個同學，前一天晚上有讀書的人數為36個，試求其信心水準95%的最大誤差_____。
9. 某校高一學生1000名，某次段考國文成績呈常態分佈，平均分數74分，標準差6分，若某生成績80分，他大約排在第_____名。
10. 由某一生產線隨機抽樣100個商品，得10個不良品，則不良品比率 p 的68%信賴區間為_____。
11. 若比率 p 的95%信賴區間為 $[0.28, 0.64]$ ，試問 p 的68%信賴區間為_____。
12. 由某一生產線隨機抽樣100個商品，得10個不良品，則樣本標準差為_____。
13. 已知某養鴨養殖場有10001隻6個月的成鴨的體重之中位數為1.5公斤，而體重在2.1公斤以上的成鴨有15隻，而體重為常態分布，試問這些成鴨的體重標準差為_____。
14. 若比率 p 的95%信賴區間為 $[0.32, 0.56]$ ，求其99.7%的信賴區間_____。

四、非選題：

- 在某一農場生產西瓜，其重量呈常態分布，我們抽出100個西瓜，其平均數 $\bar{X}=3$ 台斤，標準差1台斤，若在 $[\bar{X} \pm S]$ 之間佔68%， $[\bar{X} \pm 2S]$ 之間佔95%，且必須2台斤以上之西瓜才是良品，試求其信心水準95%的最大誤差。
- 若抽樣數 $n=100$ ，母體比率 p 的95%信賴區間的最大誤差 $e=0.04$ ，假設抽樣數改為 $n=400$ ，樣本比率不變，則 p 的99.7%信賴區間的最大誤差 e 為多少？
- 甲想了解本校同學有數位相機的比率 p 有多少，他想要信心水準99.7%，且誤差在 ± 0.02 之內，請問他至少要調查多少人？
- 檢驗某商品若干個，任意抽取25個，結果有9個為不良品，試問良品所占比率 p 的95%信賴區間？
- 袋中有紅球、藍球各若干個，某人每次從袋中拿出一球，看完顏色又放入袋中，共拿100次，結果有36次拿到紅球，試求袋中藍球所占比率 p 的99.7%信賴區間。
- 一組資料有40筆，總和為1000，平方和為28900，試問
 - 此組資料的平均數是多少？標準差是多少？
 - 有人算出40筆資料中有20筆落在區間 $(5, 45)$ 內，請問此資料是否接近常態分布？
- 媽媽懷孕約40週=280天，呈常態分配，若已知標準差 $S=4$ 天，則：
 - 中間95%的媽媽懷孕約幾天到幾天之間？
 - 懷孕天數小於276天，約佔多少百分比？

台北市立陽明高中 高二自然組 動手動腦解答

單元：B4-3-6 信賴區間與信心解讀2

班級：

座號：

姓名：

一、多選題：

1. 答案：ABCE

淵子說 由定義知A、B、C、E正確，
D錯為 $[0.4 - 0.098, 0.4 + 0.098]$

2. 答案：BE

淵子說
$$e = 2 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 2 \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow (1) \frac{1}{\sqrt{n}} < 0.01 \Rightarrow \frac{1}{n} < \left(\frac{1}{100}\right)^2, n > 10000$ 人

$(2) \frac{1}{\sqrt{n}} < 0.02 \Rightarrow n > 2500$

$(3) \frac{1}{\sqrt{n}} < 0.03 \Rightarrow n > \frac{10000}{9} = 1111.1$

取 $x = 10001$ (人), $y = 2501$ (人), $z = 1112$ (人)

3. 答案：BCE

4. 答案：ABDE

淵子說 (A) 因常態分佈的資料對稱於平均數55公斤，故在55公斤以上所佔的比例約為50%

(B) $80 = 55 + 2 \times 12.5 = \bar{x} + 2s$,

而約有95%的資料落在區間 $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$

故在80公斤以上所佔的比例約為 $\frac{1}{2} \times 5\% = 2.5\%$

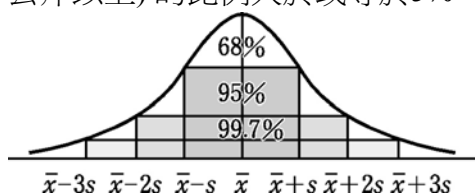
(C) $n = 100$, $\frac{n}{2} = 50$ ，而第50個資料(由小而大排序)落在45~55

\Rightarrow 中位數落在45~55公斤

(D) $\frac{n}{4} = 25$ ，而第25個資料(由小而大排序)落在45~55，

\Rightarrow 第一四分位數落在45~55公斤

(E) > 85 公斤的有5%，故「體重過重」(即體重超過80公斤以上)的比例大於或等於5%



二、單選題：

1. 答案：B

淵子說 $\hat{p} = \frac{32}{64} = 0.5$

$\Rightarrow e = 2 \times \sqrt{\frac{0.5 \times (1-0.5)}{64}} = 2 \times \frac{0.5}{8} = \frac{1}{8} = 0.125$

$\Rightarrow [0.5 - 0.125, 0.5 + 0.125] = [0.375, 0.625]$

2. 答案：A

淵子說 $\hat{p} = \frac{4}{10} = 0.4$

$\hat{S} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} = \sqrt{0.4 \times 0.6} = \frac{\sqrt{6}}{5}$

3. 答案：C

淵子說 \hat{p} 的95%信心水準的最大誤差

$$e = 2 \times \frac{\frac{\sqrt{6}}{5}}{\sqrt{10}} = 0.155 \times 2 = 0.31$$

4. 答案：E

淵子說 $\hat{p} = \frac{20}{100} = 0.2$

$\Rightarrow 95\%$ 信心水準的 $e = 2 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$= 2 \times \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{100}} = 2 \times \frac{0.4}{10} = 0.08$

三、填充題：

1. 答案：1600

淵子說 由公式 $\Rightarrow e = 2 \times \frac{S}{\sqrt{n}} \leq 0.3 \Rightarrow 2 \times \frac{6}{\sqrt{n}} \leq 0.3$

$\frac{12}{0.3} \leq \sqrt{n}, 1600 \leq n$

2. 答案：1.25

淵子說 $\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{320}} = \frac{5\sqrt{20}}{4\sqrt{20}} = \frac{5}{4} = 1.25$ 倍

3. 答案：2500

淵子說 $\left(\frac{1}{0.02}\right)^2 = \left(\frac{100}{2}\right)^2 = 2500$

4. 答案：(72, 8)

淵子說 $\frac{160}{1000} = 16\%$ 在68%之外 $\Rightarrow \bar{x} - S = 64$

$\frac{25}{1000} = 2.5\%$ 在95%之外 $\Rightarrow \bar{x} + 2S = 88 \Rightarrow \bar{x} = 72, S = 8$

5. 答案：1.2

淵子說 $e = 2 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2 \times \frac{S}{\sqrt{n}} = 2 \times \frac{6}{\sqrt{100}} = 1.2$

6. 答案：[10.67, 13.33]

淵子說 $\bar{x} = \frac{1}{9}(6 + 8 + 10 + \dots + 16) = \frac{1}{9} \times 108 = 12$

$e = 2 \times \frac{S}{\sqrt{n}} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3} = 1.33$

$\Rightarrow [12 - 1.33, 12 + 1.33] = [10.67, 13.33]$

7. 答案：[0.17, 0.23]

淵子說 $\hat{p} = \frac{320}{1600} = 0.2$

$\Rightarrow e = 3 \times \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{1600}} = 3 \times \frac{0.4}{40} = 0.03$

信賴區間為 $[0.2 - 0.03, 0.2 + 0.03] = [0.17, 0.23]$

8. 答案： $\frac{3\sqrt{7}}{64}$

淵子說 $\hat{p} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$

$\sigma = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} = \sqrt{\frac{9}{16} \times \frac{7}{16}} = \frac{3\sqrt{7}}{16}$

$e = \frac{2 \times \frac{3\sqrt{7}}{16}}{\sqrt{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{64}$

9. 答案： 160

淵子說 常態分配知大約有68%的資料落在 $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ 內
 $\bar{x}=74, s=6 \therefore$ 分數在 $(74-6, 74+6)$, 即68~80分
 間佔68%,
 超過80分或低於72分佔32%, 估計不小於80分者佔16%
 \therefore 80分約排在160名左右

10. 答案： [0.07, 0.13]

淵子說 $e=0.03$
 $[\hat{p}-e, \hat{p}+e] = [0.1-0.03, 0.1+0.03] = [0.07, 0.13]$

11. 答案： [0.37, 0.55]

淵子說 $\frac{0.28+0.64}{2}=0.46, 0.46-0.28=0.18, \frac{0.18}{2}=0.09$
 $\Rightarrow [0.46-0.09, 0.46+0.09] = [0.37, 0.55]$

12. 答案： 0.03

淵子說 $\hat{p}=\frac{10}{100}=0.1$
 $\therefore \sigma = \frac{\sqrt{0.1 \times (1-0.1)}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{0.09}}{10} = 0.03$

13. 答案： 0.2公斤

淵子說 $\frac{15}{10001} \approx 0.0015, 1-0.0015 \times 2 = 99.7\%$
 $\therefore e=3 \cdot S$
 $1.5+3S=2.1 \Rightarrow S=0.2$ (公斤)

14. 答案： [0.26, 0.62]

淵子說 $\begin{cases} \hat{p}-e=0.32 \\ \hat{p}+e=0.56 \end{cases} \Rightarrow \hat{p}=0.44,$
 $e=0.12=2 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
 $\Rightarrow \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.06$
 $\Rightarrow 99.7\%$ 信賴區間為 $[0.44-3 \times 0.06, 0.44+3 \times 0.06] = [0.26, 0.62]$

四、非選題：

1. 答案： 0.07

淵子說 $X \geq 2$ 台斤有 $(50+34)\% = 84\% = 0.84$
 $e=2 \times \frac{\sqrt{0.84 \times 0.16}}{\sqrt{100}} \approx 0.07$

2. 答案： 0.03

淵子說 $95\% \Rightarrow e=2 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2 \times \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{100}} = 0.04$
 $\Rightarrow \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} = 0.04 \times 5 = 0.20$
 若 $n=400, 99.7\% \Rightarrow e=3 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 3 \times \frac{0.20}{\sqrt{400}} = 3 \times \frac{0.20}{20} = 0.03$

3. 答案： 5625人

淵子說 $e=3 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 3 \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{2},$
 其中 $\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow e=3 \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{2} \leq 0.02 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{1}{50} \cdot \sqrt{n}$$

$$3 \times 25 \leq \sqrt{n}, n \geq 5625 (\text{人})$$

4. 答案： [0.448, 0.832]

淵子說 $\hat{p}=1-\frac{9}{25}=1-0.36=0.64$
 $\sigma=\sqrt{0.36 \times 0.64}=0.48$
 $e=2 \times \frac{0.48}{\sqrt{25}}=0.192$
 $\therefore [\hat{p}-e, \hat{p}+e] = [0.448, 0.832]$

5. 答案： [0.496, 0.784]

淵子說 $\hat{p}=1-\frac{36}{100}=0.64$
 $\sigma=\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}=\sqrt{0.64 \times 0.36}=0.48$
 $e=3 \times \frac{0.48}{\sqrt{100}}=0.144$
 $\therefore [0.64-0.144, 0.64+0.144] = [0.496, 0.784]$

6. 答案： (1) 25, 10; (2) 否

淵子說 (1) $\bar{x} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} x_i = \frac{1000}{40} = 25$
 樣本標準差 $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{40} x_i^2 - 40(\bar{x})^2}{39}} = \sqrt{\frac{28900 - 40 \times 25^2}{39}} = \sqrt{100} = 10$
 (2) $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s) = (5, 45)$ 中常態分布應佔95%,
 但此組資料只有 $\frac{20}{40} = 50\%$ 落在 $(5, 45)$ 內, 所以不符合常態分布

7. 答案： (1) 272~288天; (2) 16%

淵子說 (1) $\bar{x}=280, S=4$
 $\Rightarrow 95\%$ 為 $[\bar{x}-2S, \bar{x}+2S] = [280-8, 280+8] = [272, 288],$
 故在272~288天
 (2) 68%在 $[\bar{x}-S, \bar{x}+S] = [280-4, 280+4] = [276, 284]$ 之間,
 小於276天約佔 $(1-68\%) \div 2 = 16\%$