臺北市立陽明高中九十七學年度下學期數學補考試題

範圍：第四冊課本習題全
※請詳列計算過程，否則不予計分

班級：________ 座號：__________ 姓名：____________
滿分：115分

1. 4件不同物品全部分給甲、乙、丙三人，
(1) 若甲恰得一件，共有多少種分法？
(2) 若甲至少得一件，共有多少種分法？
（每小題5分，共10分）

2. 求 $x \cdot y \cdot z = 120$ 的正整數解 (x, y, z) 共有多少組？ **（10分）**

3. 某生有大小相同的畫筆12支：紅色3支、藍色4支、黃色5支，要將這12支筆排成一列收在盒內，其排法有多少種？（每支色筆不分頭尾） **（5分）**

4. 給了方程式：

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}=\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}\text{。}$$

求：焦點、準線、頂點及其正焦弦長。**（10分）**

5. 求 $\left(5x^2-\dfrac{3}{x}\right)^7$ 展開式中 x^2 項的係數。**（10分）**

6. 有一橢圓 Γ，中心在原點，長軸在 x 軸上，長軸的長度是短軸長度的3倍，並且 Γ 經過點 $P(3, \sqrt{3})$，試求 Γ 的方程式。**（5分）**

7. 由生產線隨機抽樣400個產品，得樣本不良率為8%，求不良率 p 的95%信賴區間。**（10分）**

8. 若有9位同學各丟一公正硬幣來決定是否去看電影，丟出正面就表贊成，否則反對，而做決定必須有過半數同學贊成，請問：他們去看電影的機會有多少？**（10分）**

9. 若拋物線的頂點是雙曲線$16x^2-9y^2=144$的中心，而拋物線的焦點是雙曲線的左焦點，求拋物線的方程式。

(5分)

10. 網球一場比賽先勝6局者贏，贏一場可得獎金1000元，甲、乙兩人實力相當，但甲已連勝5局，請問：如果因下雨不再繼續比賽，以現狀分配獎金，那麼甲、乙兩人如何分配才公平？**(10分)**

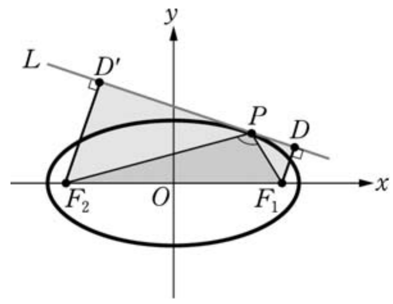
11. 通過點$Q(-2,-1)$，求$5x^2+y^2=5$的切線方程式。

(10分)

12. 測量一物件的長度10次，得其長（公尺）爲
2.43，2.46，2.41，2.45，2.44，2.48，2.46，2.47，
2.45，2.45 求：平均數和樣本標準差。**(10分)**

13. 設$P(x_1, y_1)$是橢圓Γ：$x^2+4y^2=4$上一個點，L是通過P點的切線，從焦點F_1，F_2分別作L的垂線，垂足依次爲D，D'，若$\angle F_1PF_2=60°$，試求$\triangle PF_1F_2$的面積。

(10分)



解　答

1. 答案： (1) 32種；(2) 65種

解析：(1) 若甲得第一件物品，則其他3件任意分給乙、丙，共有2^3種分法，同理，若甲得第二件物品，則其他3件任意分給乙、丙也有2^3種分法，因此共有$4\times2^3=32$（種）分法。

2. 答案：　90組

解析：　$120=2^3\cdot3^1\cdot5^1$。

令$x=2^{a_1}3^{b_1}5^{c_1}$，$y=2^{a_2}3^{b_2}5^{c_2}$，$z=2^{a_3}3^{b_3}5^{c_3}$，其中$0\le a_i\le3$，$0\le b_j\le1$，$0\le c_k\le1$，

且$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=3\text{，}\\ b_1+b_2+b_3=1\text{，}\\ c_1+c_2+c_3=1\text{。}\end{cases}$

故a_i共有$C_3^5=10$（組）解，b_j共有$C_1^3=3$（組）解，c_k共有$C_1^3=3$（組）解，

因此$xyz=120$的正整數解有$10\times3\times3=90$（組）。

3. 答案：27720種

解析：此為有相同事物的排列法，共有

$\dfrac{12!}{3!4!5!}=\dfrac{12\times11\times10\times9\times8\times7\times6}{3\times2\times1\times4\times3\times2\times1}=27720$（種）。

4. 答案：(1) 拋物線；(2)（3 , −1），$x-y+1=0$，$(\frac{7}{4},\frac{1}{4})$，$5\sqrt{2}$

解析：方程式$=\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}=\dfrac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$之幾何意義為「動點$P(x,y)$到定點$F(3,-1)$的距離$\overline{PF}$等於$P(x,y)$到定直線$L$：$x-y+1=0$的距離$d(P,L)$」，即$\overline{PF}=d(P,L)$。

(1) 此方程式所描述的圖形是一條拋物線Γ。

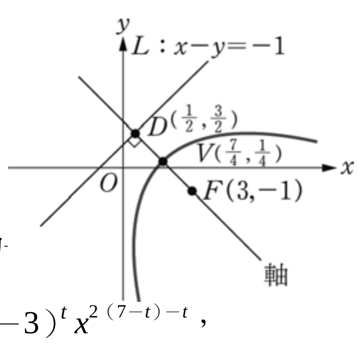
(2) 拋物線Γ的焦點為$F(3,-1)$，

準線為L：$x-y+1=0$，如附圖所示。

過$F(3,-1)$且垂直準線L：$x-y+1=0$

之直線$x+y=2$為拋物線的對稱軸，

軸與準線交於$D(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$，$\overline{DF}$的中點為頂點$V(\frac{7}{4},\frac{1}{4})$，正焦弦的長$=2\times d(F,L)=5\sqrt{2}$。



5. 答案：　354375

解析：　$(5x^2-\frac{3}{x})^7$展開式的

$C_t^7(5x^2)^{7-t}(-\frac{3}{x})^t=C_t^7 5^{7-t}(-3)^t x^{2(7-t)-t}$，

x^2項的係數，即$2(7-t)-t=2$，因此$14-3t=2$，解之得$t=4$，故x^2項的係數為$C_4^7 5^{7-4}(-3)^4=35\times125\times81=354375$。

6. 答案：　$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$

解析：由題意設Γ：$\dfrac{x^2}{(3b)^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

將點$P(3,\sqrt{3})$代入解得$b^2=4$，故Γ：$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$。

7. 答案：〔0.0529 , 0.1071〕

解析：$e=2\times\sqrt{\dfrac{0.08\times0.92}{400}}=2\times0.01356\fallingdotseq0.0271$，

不良率$\hat{p}$的95%信賴區間為

〔0.08−0.0271 , 0.08＋0.0271〕=〔0.0529 , 0.1071〕。

8. 答案：0.5

解析：5位同學擲出正面的機率＝4位同學擲出正面的機率$=C_4^9\times\dfrac{1}{2^9}$，6位同學擲出正面的機率＝3位同學擲出正面的機率$=C_3^9\times\dfrac{1}{2^9}$，7位同學擲出正面的機率＝2位同學擲出正面的機率$=C_2^9\times\dfrac{1}{2^9}$，8位同學擲出正面的機率＝1位同學擲出正面的機率$=C_1^9\times\dfrac{1}{2^9}$，9位同學擲出正面的機率＝0位同學擲出正面的機率$=C_0^9\times\dfrac{1}{2^9}$，

但$\dfrac{C_0^9+C_1^9+\cdots+C_9^9}{2^9}=1$，所以$(C_5^9+C_6^9+C_7^9+C_8^9+C_9^9)\times\dfrac{1}{2^9}=0.5$。

9. 答案：　$y^2=-20x$

解析：雙曲線$\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$之中心為$(0,0)$，左焦點為$F(-5,0)$，今拋物線$\Gamma$的頂點在原點$O(0,0)$，焦點為$F(-5,0)$，所以$\Gamma$的標準式為$y^2=-20x$。

10. 答案：　甲得$1000\times\dfrac{63}{64}$元，乙得$1000\times\dfrac{1}{64}$元

解析：乙要贏此場必須接著的6局都連贏，其機率是$(\frac{1}{2})^6=\dfrac{1}{64}$，反之，甲贏此場的機率是$1-\dfrac{1}{64}=\dfrac{63}{64}$，所以甲應得$1000\times\dfrac{63}{64}$(元)，而乙得$1000\times\dfrac{1}{64}$(元)。

11. 答案：$y=2x+3$，$y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{3}$

解析：點$Q(-2,-1)$不在橢圓$5x^2+y^2=5$上。

“斜率為m”之橢圓$\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{5}=1$的切線方程式為$L$：$y=mx\pm\sqrt{1\cdot m^2+5}$，因$L$通過點$Q(-2,-1)$，所以$-1=-2m\pm\sqrt{m^2+5}$，移項再平方可整理成$(3m+2)(m-2)=0$，$m=2$或$\dfrac{-2}{3}$，

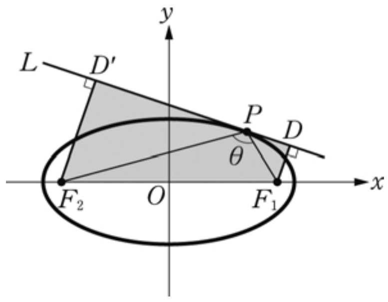
故通過點$Q(-2,-1)$之切線有兩條：$y+1=2(x+2)$和$y+1=-\dfrac{2}{3}(x+2)$。

12. 答案：2.45，$\dfrac{1}{50}$

13. 答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解析：如圖，$\theta=\angle F_1PF_2=60°$。由橢圓之光學性質知：

$\angle F_1PD = \angle F_2PD' = \alpha$



$\triangle PF_1F_2$之面積設爲A，則$A=\dfrac{1}{2}\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}\sin\theta\cdots$①

另一方面，在$\triangle PF_1F_2$中引用餘弦定理：

$(\overline{F_1F_2})^2 = (\overline{PF_1})^2+(\overline{PF_2})^2-2(\overline{PF_1})(\overline{PF_2})\cos\theta$

$=(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})^2-2(1+\cos\theta)(\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2})$，

$(2c)^2=(2a)^2-2(1+\cos\theta)(\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2})$，

故$\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}=\dfrac{2b^2}{1+\cos\theta}\cdots\cdots$②

把①代入②得$A=\left(\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)b^2=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$。

今$\theta=60°$，$b^2=1$，所以$A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。