# 臺北市立陽明高中九十七學年度下學期進階數學補考試題

範圍：範圍：第四冊課本習題全　　　　班級：________　座號：_____　姓名：_________

**※請詳列計算過程，否則不予計分**　　　　滿分：120分

1.有7位員工在本週7天輪流值班，每天排一人，請問：
(1) 若張三要求排班緊接在李四之後，則這種輪班排法有多少種？
(2) 若張三與李四兩人排班是連續兩天，則這種輪班排法有多少種？**（每小題5分，共10分）**

*2.* 某班有40位學生，飲料公司舉辦品嘗活動需要10位學生參加，請問：
(1) 參加學生的選法共有多少種？
(2) 如果飲料有甲、乙二種，將選出參與品嘗活動的10位學生平分成2組，一組品嘗甲飲料，另一組品嘗乙飲料，那麼共有多少種不同的組合方式？
**（每小題5分，共10分）**

*3.* 試問："通過點$F(0,4)$且與$x$軸相切"之所有圓的圓心$P(x,y)$，此種$P$點描出何種圖形？試求出它的方程式。**（10分）**

*4.* 求$(1+x+3x^2)^5$展開式中$x^4$項的係數。**（10分）**

*5.* 設$\Gamma$：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，$L$：$x-2y+10=0$，$P$是$\Gamma$上任一點，試求$P$到直線$L$之最小距離及對應的$P$點坐標。
**（10分）**

*6.* 由生產線隨機抽樣400個產品，得樣本不良率為8%， 求不良率$p$的99.7%信賴區間。**（10分）**

*7.* 袋中有7個白球，若干個黑球。已知從袋中一次取出2個球同為白球的機率是$\frac{7}{22}$，請問：袋中有幾個黑球？
**（10分）**

*8.* 設雙曲線$\Gamma$的方程式為$\left|\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}-\sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2}\right|=8$，
(1) 求$\Gamma$的兩個焦點及對稱中心。
(2) 求$\Gamma$的貫軸、共軛軸的直線方程式及它們的長度。
**（每小題5分，共10分）**

***9.*** 某次考試，一多重選擇題有$A$，$B$，$C$，$D$，$E$五個選項。給分標準爲完全答對給5分，只答錯1個選項給2.5分，答錯2個或2個以上的選項得0分。若某一考生對該題的$A$，$B$選項已確定是應選的正確答案，但$C$，$D$，$E$三個選項根本看不懂，決定這三個選項要用猜的來作答。求此題得分的期望值是多少？**（10分）**

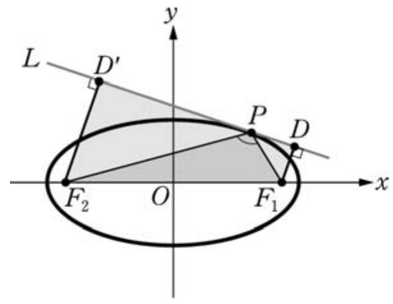
***10.*** 通過點$T\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，求$x^2-2y^2=1$的切線方程式。

**（10分）**

***11.*** 測量一物件的長度10次，得其長（公尺）爲

2.43，2.46，2.41，2.45，2.44，2.48，2.46，2.47，2.45，2.45 求：平均數和樣本標準差。**（10分）**

***12.*** 設$P(x_1, y_1)$是橢圓$\Gamma$：$x^2+4y^2=4$上一個點，$L$是通過$P$點的切線，從焦點$F_1$，$F_2$分別作$L$的垂線，垂足依次爲$D$，$D'$，若$\angle F_1PF_2=60°$，試求梯形$F_1DD'F_2$的面積。**（10分）**



**解　答**

*1.* 答案：(1) 720種；(2) 1440種

解析：(1) 可將李四與張三看成1人，故6人的排法有 $6!=720$（種）。

(2) 與(1)相似，但李四可排在張三之前或是排在其後，故有2種選擇，因此全部排法有$2!\times 6!=1440$（種）。

*2.* 答案：(1) $C^{40}_{10}$種；(2) $\dfrac{40!}{30!5!5}$種

解析：

(1) 由40位學生中選10位參加品嘗活動，選法有$C^{40}_{10}$種。

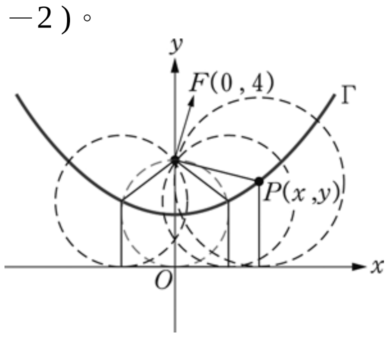
(2) 由40位學生中選10位參加品嘗活動，選法有$C^{40}_{10}$種，而這10位學生又分成5位品嘗甲飲料，5位品嘗乙飲料，其選法有$\dfrac{10!}{5!5!}$種，所以全部的選法有$C^{40}_{10}\cdot\dfrac{10!}{5!5!}=\dfrac{40!10!}{10!30!5!5!}=\dfrac{40!}{30!5!5}$（種）

*3.* 答案：拋物線，$x^2=8(y-2)$

解析：如附圖，此種$P(x,y)$點描出一條拋物線，因為點$P$恆滿足$\overline{PF}=d(P,x\text{軸})$。

其中，焦點為$F(0,4)$，準線是$x$軸：$y=0$。

此拋物線的方程式為$\sqrt{x^2+(y-4)^2}=|y|\Rightarrow x^2=8(y-2)$。




*4.* 答案： 185

解析：$(1+x+3x^2)^5=(1+x)^5+5(1+x)^4(3x^2)+10(1+x)^3(3x^2)^2+10(1+x)^2(3x^2)^3+5(1+x)(3x^2)^4+(3x^2)^5$。

由上式可得常數項為1。$(1+x)^5$展開後$x^4$項的係數為5，$5(1+x)^4(3x^2)$展開後$x^4$項的係數為$5\cdot C^4_2\cdot 3=90$，$10(1+x)^3(3x^2)^2$展開後$x^4$項的係數為$10\cdot 1\cdot 9=90$，因此展開式中$x^4$項的係數為$5+90+90=185$。

*5.* 答案： $\sqrt{5}$，$\left(\dfrac{-9}{5},\dfrac{8}{5}\right)$

解析：設$P=(3\cos\theta,2\sin\theta)$，$L:x-2y+10=0$，$P$到$L$之距離$d$為$d=\dfrac{|3\cos\theta-4\sin\theta+10|}{\sqrt{5}}$。

又$-5\le 3\cos\theta-4\sin\theta\le 5$，故$5\le 3\cos\theta-4\sin\theta+10\le 15$，即$\sqrt{5}\le d\le 3\sqrt{5}$。

(1) 當$(\cos\theta,\sin\theta)=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{-4}{5}\right)$時，

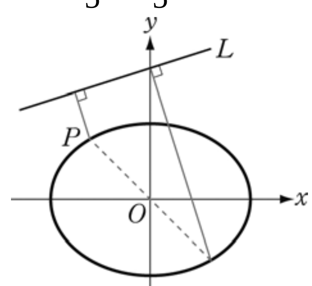
$(3\cos\theta-4\sin\theta)+10=5+10=15$為最大，

此時$d=3\sqrt{5}$，對應的$P$點坐標為$P(3\cos\theta,2\sin\theta)=\left(\dfrac{9}{5},\dfrac{-8}{5}\right)$。

(2) 當$(\cos\theta,\sin\theta)=\left(\dfrac{-3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$時，

$(3\cos\theta-4\sin\theta)+10=-5+10=5$為最小，

此時$d=\sqrt{5}$，對應的$P$點坐標為$P(3\cos\theta,2\sin\theta)=\left(\dfrac{-9}{5},\dfrac{8}{5}\right)$。




*6.* 答案：〔0.03932 , 0.12068〕

解析：$e=3\times\sqrt{\dfrac{0.08\times 0.92}{400}}=3\times 0.01356\fallingdotseq 0.04068$，

不良率$\hat{p}$的99.7%信賴區間為

〔$0.08-0.04068$ , $0.08+0.04068$〕=〔0.03932 , 0.12068〕。

*7.* 答案： 5個

解析： 設袋中有黑球$x$個

因為袋中有白球7個，所以共有球$(x+7)$個，

取2個白球的機率為$\dfrac{C^7_2}{C^{x+7}_2}=\dfrac{7\times 6}{(x+7)(x+6)}=\dfrac{7}{22}$，

故$x^2+13x+42-132=0$，$x^2+13x-90=0$，

$(x+18)(x-5)=0$，$x=5$，$x=-18$（不合）。

*8.* 答案：(1) $(3,4)$與$(-3,-4)$，$(0,0)$；(2) $4x-3y=0$，$3x+4y=0$，貫軸長8，共軛軸長6

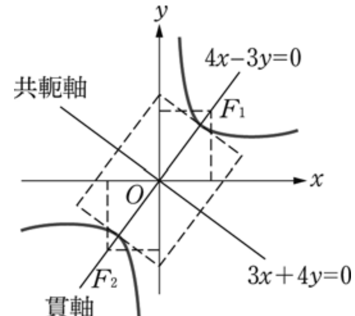
解析：$\Gamma$：$\left|\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}-\sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2}\right|=8$。

(1) 兩焦點為$F_1(3,4)$與$F_2(-3,-4)$。

原式表動點$P(x,y)$滿足$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=8$（$2a=8<2c=10$），它是一條雙曲線，對稱中心$=\overline{F_1F_2}$的中點$=(0,0)$。

(2) 貫軸$\overline{F_1F_2}$的方程式為$4x-3y=0$，共軛軸通過中心$(0,0)$並且垂直貫軸，所以它的方程式為$3x+4y=0$。$2c=$**錯誤!**$=10$，$2a=8$，所以 $2b=6$。

$\Gamma$之圖形如附：




*9.* 答案：$\dfrac{25}{16}$分

解析：$C$，$D$，$E$ 共有 8 種選取方式，

$C$，$D$，$E$ 都猜對，機率$=\dfrac{1}{8}$。

$C$，$D$，$E$ 猜對 2 個，機率$=\dfrac{3}{8}$。

此題得分的期望值 $5\times\dfrac{1}{8}+\dfrac{5}{2}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{25}{16}$（分）。

*10.* 答案：$y=x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y=-x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析：點$T\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$不在雙曲線$x^2-2y^2=1$上。

"斜率爲$m$"之雙曲線$\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$的切線方程式爲

$L：y=mx\pm\sqrt{m^2-\dfrac{1}{2}}$。

因$L$通過點$T\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，所以$\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\pm\sqrt{m^2-\dfrac{1}{2}}$，

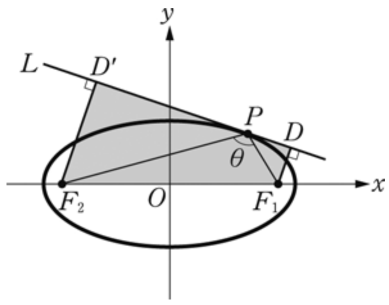
平方整理得$m^2=1$，即$m=\pm1$，

所求之切線有兩條：$y=x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$和$y=-x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

**11.** 答案：2.45，$\dfrac{1}{50}$

**12.** 答案：$2\sqrt{3}$

解析：如圖，$\theta=\angle F_1PF_2=60°$。由橢圓之光學性質知：$\angle F_1PD=\angle F_2PD'=\alpha$




設梯形$F_1DD'F_2$的面積爲$S$，則

$S=\dfrac{1}{2}(\overline{DF_1}+\overline{D'F_2})(\overline{PD}+\overline{PD'})$

$=\dfrac{1}{2}(\overline{PF_1}\sin\alpha+\overline{PF_2}\sin\alpha)(\overline{PF_1}\cos\alpha+\overline{PF_2}\cos\alpha)$

$=\dfrac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{1}{4}(2a)^2\sin2\alpha$

$=a^2\sin\theta=4\sin60°=2\sqrt{3}$。

（因$2\alpha+\theta=180°$）